UNA FORMULA PRECISA PER CALCOLARE LA LEMNISCATA DELLE MERIDIANE

FRANCESCO, GIUSEPPE E GIOVANNI FLORA

ESTRATTO

Partendo dall'analisi dell'origine dell'equazione del tempo quale somma degli effetti dell'eccentricità dell'orbita terrestre e dell'inclinazione dell'asse terrestre (già presentata al precedente seminario di gnomonica), attraverso un perfezionamento delle formule matematiche coinvolte, si raggiunge una espressione analitica per l'equazione del tempo e della declinazione del sole sufficientemente precise da poter essere usate come strumento per i disegno della lemniscata nella progettazione delle meridiane. Questo strumento consente anche una facile progettazione di meridiane per altri pianeti, come ad esempio per il pianeta Marte.

Introduzione

Questo contributo al XIII Seminario Nazionale di Gnomonica deve considerarsi un completamento del contributo intitolato "La lemniscata ed il suo significato astronomico", apportato al XII Seminario tenutosi a Rocca di Papa il 3-5 ottobre 2003. In quell'occasione si era trovata una espressione analitica semplice che consentiva un calcolo rapido dell'equazione del tempo in funzione dei vari parametri che stabiliscono il moto della terra (eccentricità dell'orbita, inclinazione dell'asse terrestre, ecc.). Usando questa espressione analitica, era stato dimostrato come la forma della lemniscata dipendesse fortemente dai suddetti parametri e che quindi sarebbe bastato variare un solo parametro per far cambiare notevolmente la forma delle nostre meridiane a tempo medio (quelle cioè che riportano la lemniscata).

In questo contributo si mostra come sia possibile, sempre in modo semplice, perfezionare la formula analitica dell'equazione del tempo fino a portare l'errore di calcolo a frazioni di secondo, ovvero a valori che comunque una meridiana non consentirebbe di apprezzare. Questo fa si che la formula che vedremo in seguito possa essere effettivamente utilizzata per la progettazione ed il disegno delle meridiane. In fine vedremo come questa tecnica consenta molto facilmente di calcolare meridiane anche per altri pianeti, come ad esempio il pianeta Marte. Ovviamente, i possibili utilizzatori di una simile meridiana non sono i marziani intesi come extraterrestri, bensì gli esseri umani che, tramite una sonda spaziale di rilevamento (come quelle già inviate su Marte) oppure tramite una spedizione umana su Marte, volessero portare lì un simbolo della cultura storica terrestre.

L'equazione del tempo

E' noto che perché trascorra un giorno solare (cioè perché un punto della terra dopo essersi trovato davanti al sole ci torni di nuovo) non basta che la terra giri su se stessa di 360°, bensì di circa 361°; infatti, mentre la terra compie un giro su se stessa, essa si sposta anche intorno al sole (moto di rivoluzione) di circa un 365-esimo di angolo giro e quindi di circa un grado. Conseguentemente il "piano del mezzogiorno" (cioè il piano che contiene l'asse terrestre ed il sole, come descritto nella relazione del 2003, ovvero il piano che segna il mezzogiorno solare per tutti i punti della terra che lo attraversano) per continuare a puntare il sole deve essere ruotato intorno all'asse terrestre di una quantità pari a circa 1° ogni giorno. Se questa quantità fosse sempre la stessa, allora tutti i giorni solari avrebbero la stessa durata. Invece così non è. Questo provoca una differenza tra il mezzogiorno solare e quello indicato dagli orologi meccanici (tempo medio), differenza che viene chiamata Equazione del Tempo (ET).

Nel suddetto contributo al seminario del 2003, era stato mostrato come l'equazione del tempo "ET" nasca dalla somma di due effetti ben distinti tra loro: il primo è la non costanza della velocità del moto di rivoluzione della terra intorno al sole, dovuta alla eccentricità dell'orbita terrestre, mentre il secondo è la diversità tra l'angolo di rotazione della terra intorno al sole e l'angolo di rotazione del piano del mezzogiorno intorno all'asse terrestre, diversità dovuta all'inclinazione dell'asse terrestre rispetto al piano dell'orbita (se l'orbita non fosse inclinata, i due angoli sarebbero uguali tra loro). In quel contributo, pur avendo visto come l'ET sia ottenibile semplicemente come somma della ET di origine orbitale (ETo) e la ET di origine assiale (ETa), corrispondenti appunto ai due effetti sopra menzionati,

1) ET= ETo + ETa

avevamo per semplicità trattato indipendentemente i due effetti.

Questa volta cercheremo una espressione più precisa per l'ET, che chiamiamo "ET innestata", dove i due contributi ETo ed ETa non vengono ottenuti indipendentemente uno dall'altro bensì calcolati tenendo conto uno dell'altro.

L'equazione del tempo orbitale (perfezionata)

Anche questa volta cominciamo dal calcolo della ETo, ovvero dalla differenza tra la posizione angolare vera "θ" della terra nel suo moto di rivoluzione intorno al sole (vedi Fig. 1) e la posizione falsa "θ_F"= $\omega_M \cdot t$ che la terra avrebbe avuto se la sua orbita fosse circolare (ovvero se viaggiasse intorno al sole ad una velocità angolare ω costante e pari a quella media ω_M della terra vera) e vediamo come si possa perfezionarlo rispetto a quanto riportato nel precedente contributo del 2003.

ETo può essere espressa sia in termini di angolo (ETo=θ-θ_F) sia in termini di tempo (ETo=θ-θ_F /ωa), dove ωa è la velocità di rotazione apparente del sole intorno alla terra: ωa= 360°/giorno = 15°/ora = 0.25°/minuto.

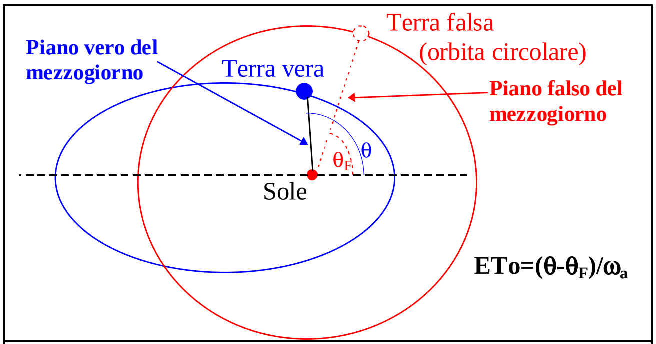


Figura 1: Posizione vera della terra e posizione falsa prevista dagli orologi meccanici. In questa figura, per semplicità, si considera il piano del mezzogiorno (e quindi anche l'asse terrestre) perpendicolare all'orbita.

Nel precedente contributo avevamo visto che le prime due leggi di Keplero portano rapidamente ad ottenere una equazione differenziale che lega la posizione angolare θ alla velocità angolare ω=Δθ/Δt ovvero:

$$2)\quad \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega_M \cdot \frac{a^3}{b^3} \cdot [1 + \varepsilon \cdot \cos(\theta)]^2$$

dove, usando come unità di misura degli angoli i radianti, è $\omega_M=2\pi/T$, T= 1 anno = 365giorni: 5^h: 48': 47": 33"', "a" e "b" sono rispettivamente il semiasse maggiore e minore dell'orbita terrestre (a=149,598 milioni di km mentre b=149,577 milioni di km), ε=c/a=0.016719 è l'eccentricità dell'orbita terrestre e "c" è lo spostamento dei fuochi (quindi del sole) rispetto al centro dell'ellisse (cioè rispetto all'origine degli assi cartesiani): $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ = 2,5 milioni di km.

Questa difficile equazione differenziale può essere risolta semplicemente in modo numerico con il metodo di integrazione di Runge - Kutta (vedi precedente relazione del 2003) così da ottenere l'esatta posizione angolare "θ"della terra vera al variare del tempo "t". Essa differisce molto poco da quella della terra falsa, come mostrato in Fig. 2.

Al momento del perielio la terra vera è più veloce e quindi durante i giorni successivi essa supera la terra falsa. Poi, a metà anno, la terra rallenta perché è più lontana dal sole e così rimane indietro rispetto alla terra falsa. In Fig. 3 si riporta (ingrandita rispetto a figura 2) la differenza tra le due posizioni, differenza che chiamiamo ETo.

Come si può vedere, l'ETo raggiunge al massimo i 2° circa. Questa differenza di posizione della terra, e quindi di rotazione del piano del mezzogiorno (che coinciderebbe esattamente con ETo se l'asse terrestre fosse perpendicolare al piano dell'orbita), sembra piccola vista in Fig. 2. Ma in realtà il sole, nel suo moto apparente, impiega 8 minuti per ruotare di 2° e quindi l'effetto sul tempo (nel confronto tra tempo solare e tempo medio) è notevole.

Come già detto nella relazione del 2003, una soluzione numerica è poco pratica perché costringe a memorizzare molti numeri, insomma non è affatto sintetica. Ci eravamo quindi chiesti se esistesse una espressione analitica (una formula quindi) che possa approssimare bene la soluzione numerica.

A tal fine conviene riscrivere l'equazione 2) sviluppando il quadrato:

$$3)\quad \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega_M \cdot \frac{a^3}{b^3} \cdot \left[1 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \cos(\theta) + \varepsilon^2 \cdot \cos^2(\theta)\right]$$

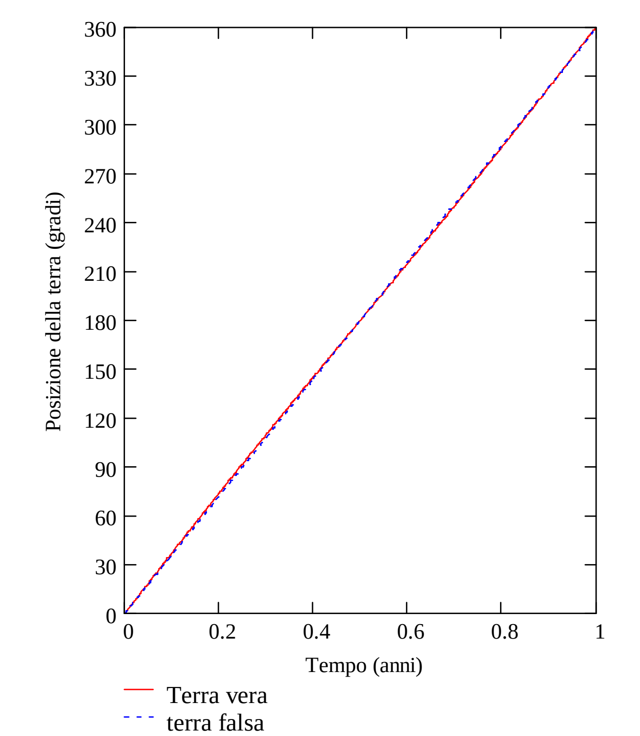


Figura 2: Posizione angolare della terra vera (curva continua) e della terra falsa (retta tratteggiata) durante l'arco di un anno (a partire dal momento del perielio).

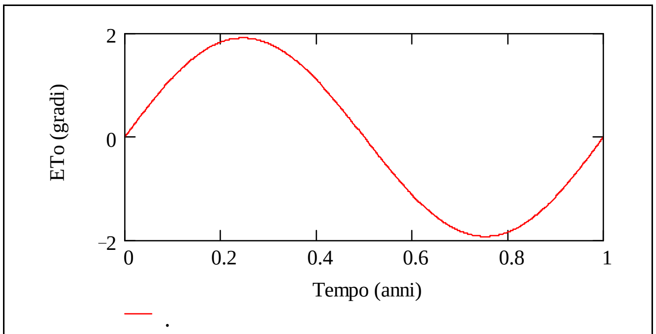


Figura 3: Differenza di posizione angolare (ETo) tra terra vera e terra falsa.

A quel tempo, trascurando il termine in ε^2 (grazie al piccolo valore di ε), assumendo $a^3/b^3 \approx 1$ ed accettando l'approssimazione $\theta \approx \omega_M \cdot t$ dentro al termine del coseno, avevamo trovato la soluzione approssimata della (3):

$$4)\quad \theta(t) = \omega_M \cdot t + 2\varepsilon \cdot \mathrm{sen}(\omega_M \cdot t)$$

dove "t" è il tempo, espresso nella stessa unità di misura del periodo di rotazione T e **a partire dal momento del perielio**.

Quindi, ricordando che ETo è la differenza tra θ e $\omega_M \cdot t$, dalla 4) avevamo ottenuto:

$$5)\quad \mathrm{ETo}(t) \approx 2 \cdot \varepsilon \cdot \mathrm{sen}(\omega_M \cdot t)$$

Ed infatti nel grafico di Fig. 3 è evidente che ETo sia molto simile ad una funzione di tipo sinusoidale.

Rispetto alla soluzione esatta della (3), la soluzione analitica (4) comporta un errore massimo di circa 0.02°, come mostrato in Fig. 4) pari ad un tempo di circa 5 secondi sul valore di ETo.

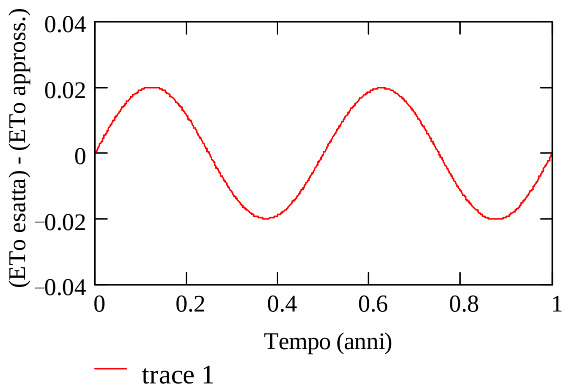


Figura 4: Differenza tra ETo esatta (ottenuta con integrazione Runge Kutta) ed ETo approssimata secondo l'equazione 5) (valori in gradi).

Questo errore può essere ulteriormente ridotto se tentiamo di non trascurare il termine in ε^2. Questa operazione non è affatto semplice e scontata perché il $\cos^2(x)$ è una funzione sempre positiva (il cui integrale è $\frac{1}{4} \cdot \mathrm{sen}(2x) + \frac{1}{2} \cdot x$) e quindi cresce monotonamente nel tempo, mentre l'espressione della ETo deve avere valore medio pari a zero. D'altronde, da Fig. 4 è evidente che la differenza tra la ET - esatta e quella data dall'equazione 5) è una funzione di tipo seno con periodo di mezzo anno, ovvero una funzione del tipo $\mathrm{sen}(2\omega_M \cdot t)$. Procedendo allora empiricamente e tentando di aggiungere alla 5) un termine in $\mathrm{sen}(2\omega_M \cdot t)$ si ottiene che la migliore approssimazione con la soluzione numerica della (3) è raggiunta per:

$$6)\quad \theta(t) = \omega_M \cdot t + 2\varepsilon \cdot \mathrm{sen}(\omega_M \cdot t) + \frac{5}{4} \cdot \varepsilon^2 \,\mathrm{sen}(2 \cdot \omega_M \cdot t)$$

come mostrato in Fig. 5, questa espressione di $\theta(t)$ differisce da quella esatta per un angolo che non supera i 0.0004° ovvero per un corrispondente errore di tempo sulla ETo di appena 0.1 secondi!

Possiamo allora prendere, come espressione analitica quasi esatta della ETo, la seguente formula:

$$7)\quad ETo(t) = 2\varepsilon \cdot \mathrm{sen}(\omega_M \cdot t) + \frac{5}{4} \cdot \varepsilon^2 \,\mathrm{sen}(2 \cdot \omega_M \cdot t)$$

dove il tempo "t" va sempre considerato a partire dal momento del perielio (quindi, ad esempio nel 2004, dalle ore 18:00 del 4 gennaio).

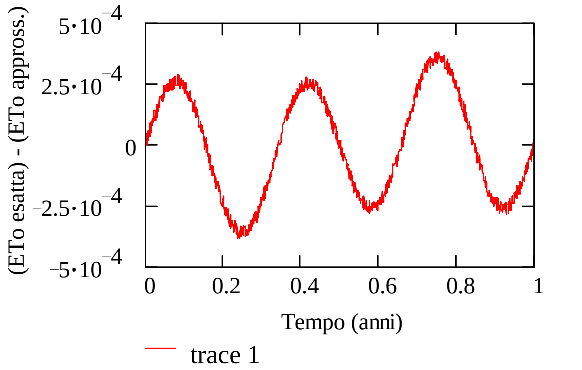


Figura 5: Differenza tra ETo esatta (ottenuta con integrazione Runge Kutta) ed ETo approssimata secondo l'equazione 7) (valori in gradi).

Da questa figura è evidente che ora la differenza tra la soluzione numerica "esatta" e quella analitica approssimata ha un andamento di tipo ancora una volta sinusoidale ma con periodo pari ad un terzo di anno. Se si volesse ridurre ulteriormente l'errore, si dovrebbe quindi aggiungere un altro termine nella 7) del tipo $\mathrm{sen}(3\omega_M \cdot t)$, ma questo esula dalle intenzioni di questa relazione perché per la progettazione di una meridiana è più che sufficiente avere la precisione data dalla 7).

Poiché, come visto nella relazione del 2003, l'espressione della equazione del tempo assiale viene riferita al momento del solstizio invernale e poiché le si dovrà sommare (equazione 1) ovviamente con lo stesso riferimento temporale, conviene fin da ora ottenere l'espressione della ETo riferita al solstizio anziché al perielio. Per far ciò basta sottrarre alla variabile tempo il ritardo $T\varphi$ con cui avviene il perielio rispetto al solstizio:

$$8)\quad ETo(t) = 2\varepsilon \cdot \mathrm{sen}\left[\omega_M \cdot (t - T\varphi)\right] + \frac{5}{4} \cdot \varepsilon^2 \,\mathrm{sen}\left[2 \cdot \omega_M \cdot (t - T\varphi)\right]$$

Scritta così, la ETo(t) è pronta per essere sommata alla ETa(t) perché **entrambi saranno riferite allo stesso istante di origine: il solstizio d'inverno,** ovvero il momento in cui il "piano dell'asse terrestre", definito come il piano contenente l'asse terrestre ed ortogonale al piano dell'orbita terrestre, attraversa il sole (con il polo nord più lontano dal sole che non il polo sud).

Nell'anno 2003 il solstizio d'inverno è avvenuto il 22 dicembre alle ore 7:04' mentre il perielio è avvenuto in data 4 gennaio 2004 alle ore 18:00. Il ritardo $T\varphi$ del perielio rispetto al solstizio è stato quindi di 13 giorni : 10^h: 56'. Quindi: Tφ=0.03684 anni tropici.

Se si volesse aggiornare Tφ all'anno in cui ci si trova, tenendo in conto del fenomeno della precessione degli equinozi, basta aggiungere al suddetto valore un tempo di 24':23" per ogni anno trascorso a partire dal 2004, cioè una quantità annuale pari alla differenza tra la durata dell'anno tropico (tempo tra un solstizio invernale ed il successivo) e quella dell'anno siderale (tempo tra un perielio ed il successivo).

L'equazione del tempo assiale (perfezionata)

A questo punto possiamo calcolare l'effetto dell'inclinazione dell'asse terrestre, che dà luogo ad una differenza tra l'angolo di rotazione, α', del piano del mezzogiorno intorno all'asse terrestre e l'angolo α che esprime la posizione angolare della terra a partire dalla posizione che essa assume nel momento del solstizio invernale, come mostrato in Fig. 6.

L'angolo α' viene misurato tra il "piano del mezzogiorno" ed il "piano dell'asse terrestre"(definito appunto come il piano contenente l'asse terrestre ed ortogonale al piano dell'orbita terrestre), come mostrato in Fig. 7. Nel giorno del solstizio, il piano dell'asse terrestre coincide con il piano del mezzogiorno e quindi in quel giorno è α'=0.

Come visto nella relazione del 2003, α' ed α sono legati da una relazione semplice:

$$\frac{tg(\alpha)}{tg(\alpha')} = \cos(\delta_0) \qquad \text{e quindi:}$$

9) $\alpha'(t) = \text{arctg}\,[\text{tg}\,(\alpha(t))/\cos(\delta_0)]$

dove δ_0=23°:26':20" è l'inclinazione dell'asse terrestre rispetto al piano dell'orbita.

Nel calcolare α' è necessario aggiungere all'arcotangente il valore π quando α supera π/2 ed il valore 2π quando α supera π·3/2. Questo a causa delle proprietà periodiche della funzione arcotangente.

Nella relazione del 2003 avevamo assunto, per semplicità, $\alpha=\omega_M \cdot t$, ignorando quindi la presenza della ETo. Ora invece calcoliamo il vero valore di α (tenendo quindi già conto dell'effetto della ETo), che inserito nella (9) consente di ottenere direttamente il vero valore di α' e quindi l'esatto valore di ETa(t) **con origine del tempo nell'istante del solstizio d'inverno**:

10) $\alpha=\omega_M \cdot t + ETo(t)$

dove ETo(t) è data dall'equazione 9).

L'equazione del tempo assiale è dunque:

11) $ETa(t)=\alpha'(t) - \alpha(t) = \text{arctg}[\text{tg}(\alpha(t))/\cos(\delta_0)] - \alpha(t)$

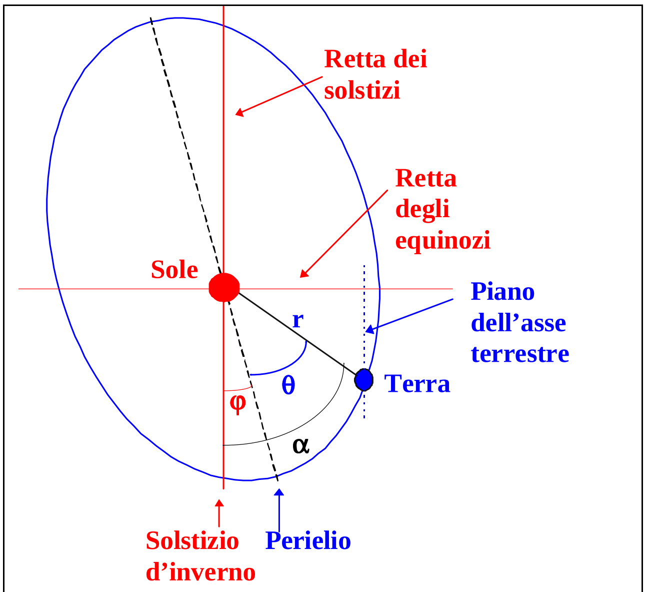


Figura 6: Sistemi di coordinate angolari per la posizione della terra: rispetto al perielio o rispetto al solstizio.

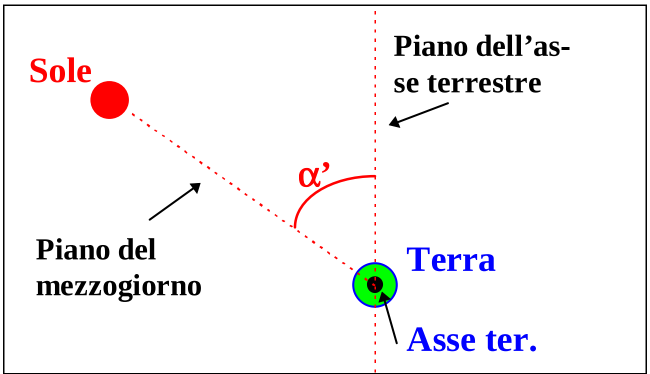


Figura 7: Terra e sole visti dalla stella polare

In Fig. 8 sono riportate la ETo ed ETa corrispondenti alle equazioni 8) ed 11) rispettivamente.

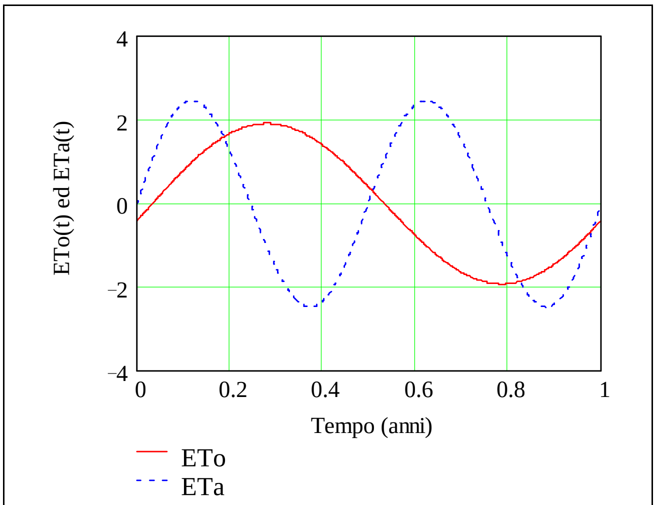


Figura 8: Equazione del tempo orbitale (linea continua) ed assiale (linea tratteggiata) in funzione del tempo a partire dal momento del solstizio invernale (valori in gradi).

Dalla Fig. 8 risulta, come già evidenziato nella relazione del 2003, che i due contributi ETo ed ETa all'equazione del tempo sono confrontabili in ampiezza.

L'equazione del tempo totale (innestata)

A questo punto basta inserire i valori di ETo(t) ed ETa(t) nella equazione 1) per ottenere l'equazione del tempo totale (che, ottenuta in questo modo, abbiamo chiamato "innestata").

Ma, per uniformarsi alle convenzioni sui segni utilizzate nel libro delle effemeridi, dobbiamo invertire di segno la 1). Inserendo quindi la 8) e la 11) nella 1) ed invertendo il segno si ottiene semplicemente:

12) $ET(t)= \omega_M \cdot t - \alpha'(t)$

che espressa in termini di tempo diventa:

13) $ET(t)= [\omega_M \cdot t - \alpha'(t)] / \omega_a$

L'equazione del tempo è quindi la differenza tra la posizione angolare α' del vero piano del mezzogiorno e la falsa posizione "$\omega_M \cdot t$" prevista per esso dagli orologi meccanici (cioè la posizione angolare che esso avrebbe avuto se ruotasse intorno all'asse terrestre ad una velocità angolare ω_M costante.

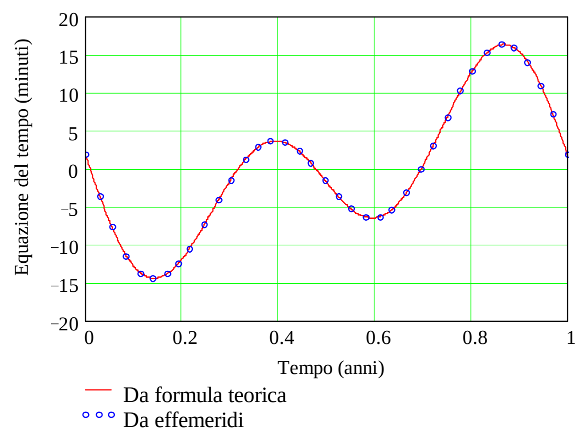


Figura 9: Equazione del tempo "innestata" (curva continua) calcolata per l'anno 1941 confrontata con i valori del libro delle effemeridi dello stesso anno (cerchi).

In Fig. 9 è riportata l'equazione del tempo "innestata" ottenuta tramite la 13) confrontata con i valori delle effemeridi del 1941 (aggiornando quindi Tφ al 1941, data in cui valeva 0.034 anni anziché 0.037): l'errore massimo (2.4 secondi) è pari alla precisione con cui sono qui riportati i valori delle effemeridi (quindi questo confronto non sarebbe potuto risultare migliore di così ed esso conferma che la formula qui riporta per l'ET è veramente precisa). Se si utilizzasse l'attuale valore di Tφ, allora l'errore massimo raggiungerebbe i 10.4 secondi. Quindi, dal 1941 ad oggi l'equazione del tempo, in certi periodi dell'anno, è già cambiata di quasi una decina di secondi!

Malgrado la verifica sulla correttezza della ET innestata così ottenuta sia stata limitata a 2.4 secondi, non ci sono motivi per dubitare che in realtà essa abbia la stessa precisione della ETo, ovvero 0.1 secondi.

La conoscenza della corretta posizione angolare α(t) della terra rispetto al solstizio invernale consente anche il calcolo del corretto valore di declinazione del sole:

14) $\delta(t)= - \delta_0 \cdot \cos[\alpha(t)]$

Nel prossimo paragrafo vedremo quali applicazioni sono consentite dalla formula della ET qui riportata.

Le applicazioni della formula

La precisione della formula è superiore a quella raggiungibile da una meridiana. Questo fa sì che essa non abbia solo un uso didattico (come era stato presentato nella relazione del 2003), bensì anche un possibile utilizzo effettivo nella progettazione delle meridiane. Facendo variare il tempo "t" da zero ad 1 anno tropico, la formula consente di ottenere un numero qualsiasi di coppie di valori ET(t) e δ(t) da usarsi per tracciare la lemniscata delle ore. Quale esempio, figura 10 riporta una lemniscata ottenuta con 1000 punti (quindi dividendo l'intervallo di tempo in 1000 passi nel passare dal valore 0 al valore di 1 anno. In tabella 1 si riporta la sequenza di equazioni utilizzate.

T=1
t=0...1 (in quanti passi si voglia)
$\omega_M=2\pi/T$ (radianti all'anno)
$\omega a= 0.25$ (gradi al minuto)
$T\varphi=0.03684$ anni tropici
$\varepsilon=0.016719$
$\delta_0=23.439° \cdot \pi/180°$ (radianti)

$$ETo = 2\varepsilon \cdot \text{sen}\left[\omega_M \cdot (t - T\varphi)\right] + \frac{5}{4} \cdot \varepsilon^2 \,\text{sen}\left[2 \cdot \omega_M \cdot (t - T\varphi)\right]$$

(radianti)

$\alpha=\omega_M \cdot t + ETo$ (radianti)
$\alpha'=\text{arctg}[\text{tg}(\alpha)/\cos(\delta_0)] + \pi \cdot (\alpha>\pi/2) + \pi \cdot (\alpha>\pi \cdot 3/4)$
dove [(a>b) =1 se vera, =0 se falsa]

$ET=(\omega_M \cdot t - \alpha') \cdot (180° / \pi)/\omega_a$ (minuti)
$\delta= - \delta_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot 180/\pi$ (gradi)

Tabella 1: Sequenza di operazioni per ottenere ciascun punto della lemniscata (utilizzando come unità di misura degli angoli i radianti).
Ad esempio, per t=0 si ottiene:
ETo= -7.827.10-3 rad., α=-7.827.10-3 rad., α'=-8.531.10-3 rad., ET= 1.955 minuti.
Mentre per t=0.2 si ottiene:
ETo=0.029 radianti, α=1.286 radianti, α'=1.308 radianti, ET= -11.761 minuti.

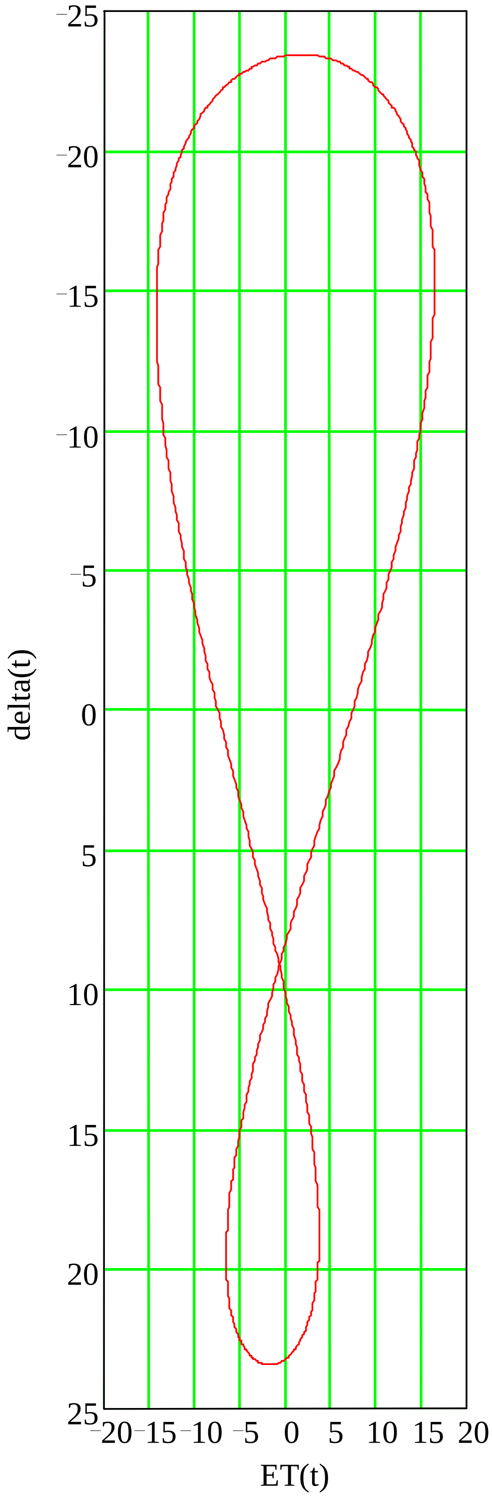


Figura 10: La lemniscata ottenuta tramite le equazioni 13) e 14) (ET è qui espressa in minuti, mentre δ è in gradi)

Un altro possibile utilizzo della formula dell'ET(t) e di δ(t) è quella del loro calcolo in un momento preciso dell'anno, ad esempio per poter inserire in una meridiana un punto corrispondente ad una data particolare (compleanno, matrimonio, ecc.).

In questo caso bisogna che il momento di interesse "t" venga inserito nelle formule di tabella-1 espresso nelle stesse unità del periodo "T" di un anno tropico e a partire dal momento del solstizio invernale. Quindi, ad esempio, se si vuole riportare sulla meridiana il compleanno di una persona nata il 27 gennaio, assumendo che il solstizio avvenga il 21 dicembre (cioè 10 giorni prima della fine dell'anno), si potrà usare per "t" il valore (27+10) giorni e per T il valore 365.242 giorni.

Una meridiana per i marziani

Una applicazione assolutamente innovativa della formula può essere quella di calcolare una meridiana per un altro pianeta. In tal caso non sarebbe facile potersi procurare il valore dell'equazione del tempo ET(t) e della declinazione del sole δ(t), dal momento che la letteratura è piuttosto povera di simili dati per pianeti diversi dalla terra.

Prendiamo allora ad esempio il pianeta Marte, cioè il pianeta a noi più vicino e per il quale è pensabile in un vicino futuro di poter eseguire delle missioni umane [1].

Possiamo, anche per Marte, definire la durata di una "ora-marziana" come la 24-esima parte della durata del giorno solare medio su Marte, definire il "minuto marziano" come la 60-esima parte di un'ora marziana, ecc.

In tabella-2 vengono riportati alcuni dati astronomici su Marte [1,2], confrontati con quelli analoghi per la Terra. Questi dati ci saranno essenziali per poter calcolare la meridiana-marziana.

	Terra	Marte
Durata di un anno	1 anno - terrestre	1.881 anni - terrestri
Durata media di un giorno	24:00'	24^h:39':35"
Durata di un'ora marziana		1^h:1':39"
Semiasse maggiore dell'orbita	149.60 milioni di Km	227.94 milioni di Km
Eccentricità dell'orbita (ε)	0.016719	0.093412
Inclinazione dell'asse (δ_0)	23°:26'	23°:59'
Sfasamento perielio - solstizio ($T\varphi$)	+ 0.036 (anni-terrestri)	- 0.045 (anni-marziani)

Tabella-2: Dati astronomici di Marte confrontati con quelli terrestri.

Il segno negativo sullo sfasamento $T\varphi$ per Marte sta ad indicare che in questo periodo storico il perielio su Marte avviene un po' prima del solstizio invernale anziché un po' dopo.

La durata di una "ora-marziana" è quindi simile a quella di un'ora-terrestre. E non sarebbe difficile per un essere umano spendere qualche giorno su Marte. Anche l'inclinazione dell'asse è simile a quella terrestre (le stagioni sono analoghe a quelle terrestri, solo che durano un maggior numero di giorni) e quindi l'equazione del tempo assiale è simile a quella terrestre. Ma l'eccentricità dell'orbita di Marte è significativamente superiore a quella della terra. Conseguentemente, l'equazione del tempo orbitale (ETo) per Marte è molto più grande (vedi Fig. 11) e ampiamente dominante rispetto a quella assiale, al punto che quest'ultima non riesce (come nel caso terrestre) a far invertire di segno due volte l'equazione del tempo complessiva (ET): nel caso di Marte la ET(t) si inverte di segno una sola volta all'anno, come riportato in Fig. 12, ed assume valori ben maggiori che per la terra.

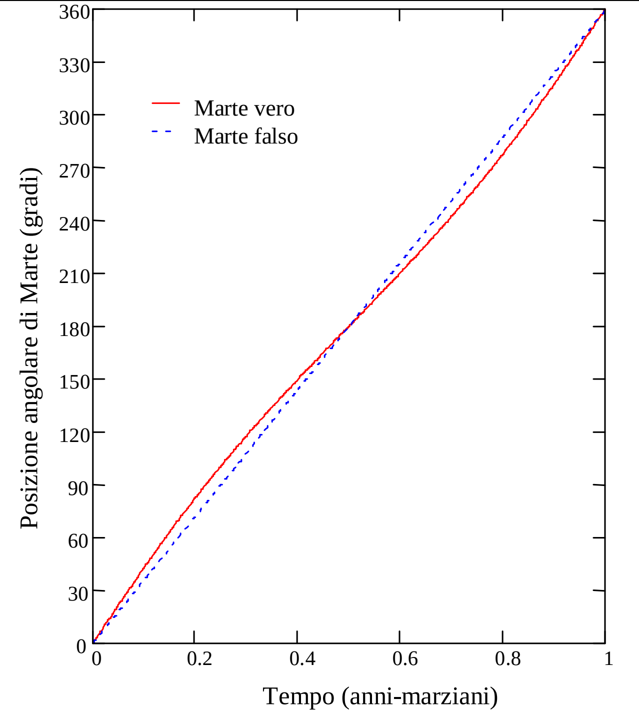


Fig. 11: Posizione vera di Marte (curva continua) e posizione di un falso Marte avente orbita circolare (retta tratteggiata) in funzione del tempo (in anni-marziani). La differenza rispetto a Fig. 2, relativa alla Terra, dovuta al maggior valore di ETo è evidente.

Malgrado il diverso valore di eccentricità dell'orbita marziana, il coefficiente 5/4 del termine in sen($2\omega_M \cdot t$) dell'equazione 7), trovato empiricamente per la terra, rimane ancora il valore che riduce al minimo l'errore della Eto - approssimata (fornita dall'equazione 7) rispetto alla Eto esatta ottenuta tramite l'integrazione numerica dell'equazione 3) con il metodo di Runge - Kutta. Tuttavia, nel calcolo della ETo Marziana, la soluzione analitica data dall'equazione 7) arriva a differire da quella numerica fino a 15 " marziani (questo perché ε è molto maggiore di quella terrestre).

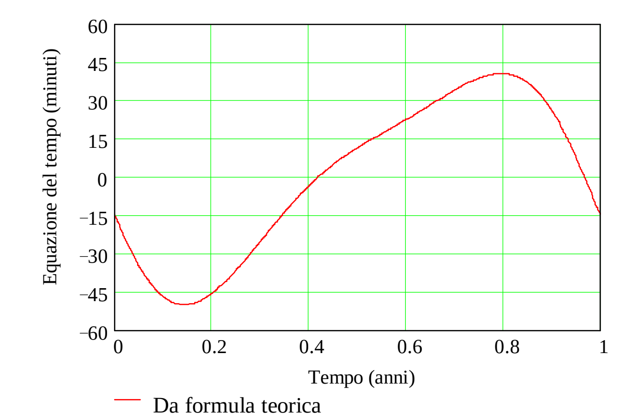


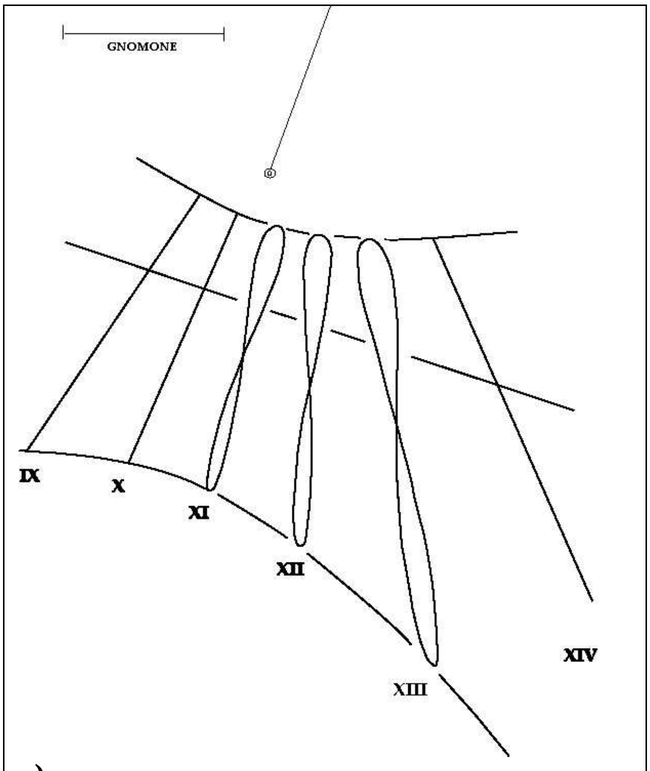
Figura 12: L'equazione del tempo su Marte (in minuti - marziani), a partire dal momento del solstizio invernale su Marte, ottenuta inserendo i dati astronomici di Tabella-2 nella procedura di calcolo di Tabella-1.

Possiamo progettare una meridiana marziana esattamente allo stesso modo in cui vengono progettate quelle terrestri: automaticamente la meridiana indicherà le ore-marziani solari (se calcolata a tempo vero) oppure le ore-marziane a tempo-medio se si inserisce in essa il valore di equazione del tempo e di declinazione del sole previsti dalle formule di Tabella-1 ma con i valori di eccentricità, di inclinazione dell'asse e di sfasamento perielio-solstizio riportati in tabella-2 per Marte.

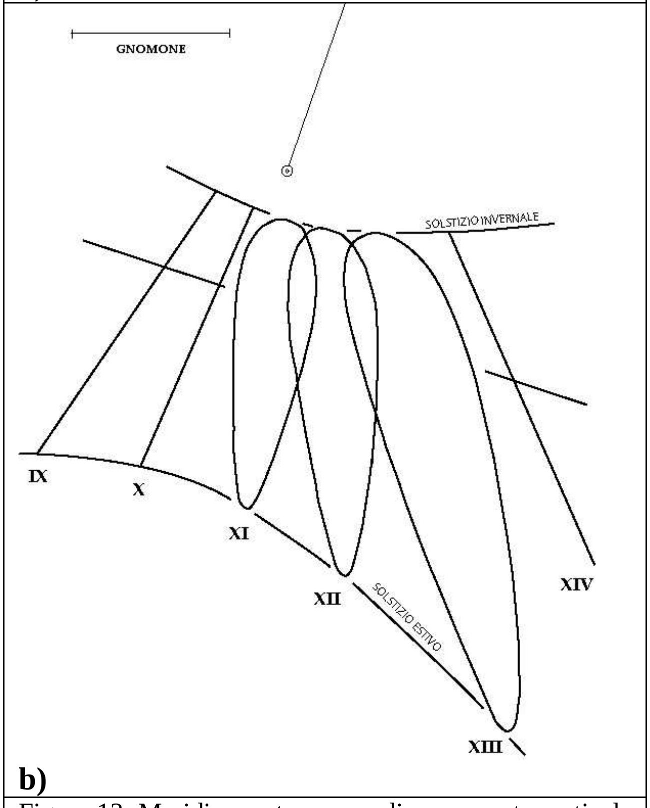
In Fig. 13 si riporta, a titolo di esempio, il confronto di una meridiana a tempo vero del sole (per alcune ore) e a tempo medio (per le ore centrali del giorno) calcolata per una parete verticale orientata a 20° verso EST per località a 46° latitudine NORD e 12° longitudine EST (ovvero 3° a Ovest del fuso di riferimento) localizzata sulla terra oppure localizzata nella corrispondente località di Marte.

Come si può notare, l'enorme valore raggiunto dalla ET(t) su Marte e la singola - inversione di segno sulla ET(t) fanno sì che la lemniscata delle meridiane marziane sia molto più rigonfia di quella delle meridiane terrestri e con una forma a uovo.

In fine è importante precisare che, essendo il sole più piccolo se visto da Marte, la precisione di lettura delle meridiane Marziane risulta superiore a quella delle meridiane terrestri.



a)



b)

Figura 13: Meridiana a tempo medio per parete verticale orientata a 20° verso EST per località a 46° latitudine NORD e 12° longitudine EST (ovvero 3° a Ovest del fuso) per la Terra (a) e per Marte (b). Il cerchio indica la posizione del piede dello gnomone.

Conclusioni

Perfezionando le formule analitiche per il calcolo dell'equazione del tempo, si è raggiunta una precisione tale da far apprezzare le modifiche che la lemniscata delle meridiane subisce nell'arco di appena 60 anni (dal 1941 ad oggi). Questo dimostra che le formule qui riportate possono tranquillamente essere utilizzate per il calcolo delle meridiane a tempo medio (e non solo per la terra), con il vantaggio di poter "aggiornare" la forma della lemniscata al decennio in cui la meridiana viene progettata.

Gli autori auspicano che alcuni costruttori di meridiane provino ad utilizzare queste formule e possano riportare nei futuri "Seminari di Gnomonica" l'esito delle loro prove.

Ringraziamenti:

Si ringrazia la Dott.ssa Sabrina Stefani per il suo contributo nella grafica di questa relazione ed il Dr. Luca Mezi per il suo contributo nel calcolo di integrazione numerica tramite Runge - Kutta.

Bibliografia:

[1] Pianeta Marte - Miti e realtà del futuro avamposto dell'umanità, di Stefano Cavina, AIEP Editore.

[2] Dal sito WEB: http://astrobiology.berkeley.edu