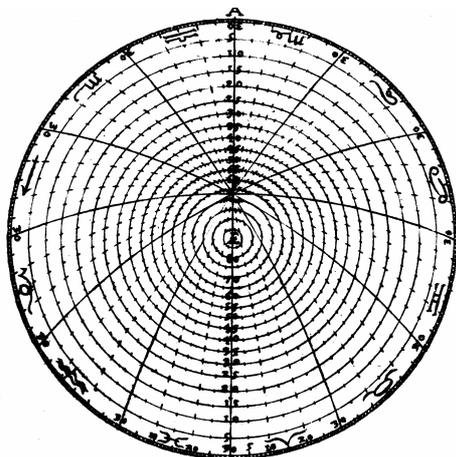


UN ABACO PER TROVARE LA DURATA DEL GIORNO E DELLA NOTTE ALESSANDRO GUNELLA

ESTRATTO

L'argomento è incentrato sul grafico inventato da Teofilo Bruni (matematico veronese del '600), per individuare la lunghezza del giorno e della notte in qualsiasi periodo dell'anno ed a qualsiasi latitudine. Il costruttore, dopo averlo chiamato *Zodiaco*, lo ha definito anche "astrolabio", e questa parola è stata la chiave per scoprire l'origine proiettiva del quadrante, anche se con l'astrolabio non ha nulla a che fare. Si spiega la sua costruzione, e il possibile uso.



Questo articolo non sarebbe mai nato, se il collega ed amico Massimo Goretti non mi avesse mandato la fotocopia di uno strano "astrolabio" da lui scovato in una biblioteca dell'aretino. Pensare che avevo l'originale in casa... Ma, dopo una scorsa, avevo messo da parte l'intero libro, perché mi pareva piuttosto arruffato.

Alla pagina 29 del trattato IV di Teofilo Bruni⁵⁶ vi è il disegno di un diagramma circolare, con cui è possibile, secondo l'autore, trovare un certo numero di dati relativi alla lunghezza del giorno.

Egli lo definisce così:

Formation del Zodiaco à tutte le obliquità de Orizonti,

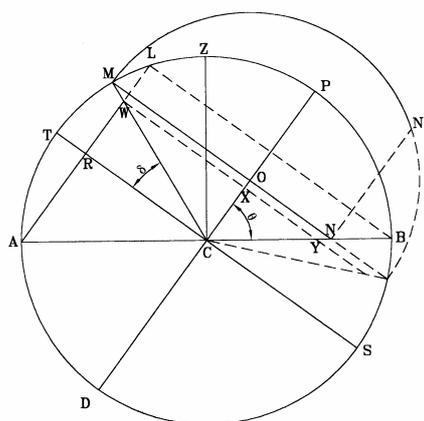


Figura 1

per via Geometrica, co'l quale si posson saper li archi diurni, e notturni, il leuar del sole, il tramontare, il mezo dì & meza notte.

⁵⁶ *Armonia Astronomica & Geometrica di Theofilo Bruni Veronese, diuisa in quattro Trattati - Venezia MDCXXI.*

In realtà la definizione è un poco enfatica: è ovvio che, determinata la lunghezza dell'arco diurno, si può trovare quella dell'arco semidiurno, e determinare in fine a che ora eguale nasca o tramonti il Sole. È comunque un diagramma "universale" valido per tutte le Latitudini.

Il grafo è stuzzicante, forse perché l'autore non offre nessun appiglio per sapere se esso dia valori solo approssimativi oppure abbia origine geometrica ben precisa. Per la verità anche la spiegazione sulla utilità dello strumento è piuttosto arruffata, per non dire confusa. Bisogna ammettere che l'autore (o il traduttore? Il libro è la traduzione/riduzione di un manoscritto in Latino ed è stato pubblicato da un allievo del Bruni) non ha grandi doti didattiche.

Trovare il bandolo della matassa è stato per me una specie di tormentone per parecchi giorni (risolto, come mi succede sovente, in un periodo di insonnia, fra le 4 e le 5 del mattino), e di conseguenza penso che meriti farne una breve relazione, tanto più che esso può costituire un esempio di applicazione dell'analemma, di cui mi dichiaro fedele seguace. Sarà mai utile a qualcuno?

Figura 1: la rappresentazione piuttosto scarna dell'analemma mette in evidenza che per la Latitudine θ e la declinazione δ l'arco semidiurno è rappresentato dall'arco MN' , la cui traccia sull'analemma è il segmento MON .

Se però facciamo la costruzione illustrata dalla figura (il triangolo rettangolo ABL , con BL perpendicolare all'asse polare CP) otteniamo, per intersezione con la direzione meridiana MC del raggio solare, il segmento ARW che ha caratteristiche analoghe a MON . In altri termini,

$$ON:OM = WR:RA$$

La dimostrazione è abbastanza agevole se si tiene conto che il triangolo WCY è simile al triangolo MCN , e che il triangolo WAY è simile al triangolo RAC e al triangolo XCY .

La catena dei rapporti è la seguente:

$$ON:OM = YX:XW = YC:CA = WR:RA.$$

Nella stessa figura si osserva che gli archi BP e PL sono uguali, perché BL è perpendicolare alla polare BP . Quindi la posizione del segmento LA può essere messa in diretta relazione con la latitudine. Teofilo Bruni ha trovato un altro "punto di vista" da cui osservare l'Analemma.

Passando ora alla **Figura 2**, che è una semplificazione didattica della figura precedente, possiamo osservare che l'arco AW' sottende lo stesso angolo al centro dell'arco MN' della figura 1. Quindi anche l'arco AW' rappresenta la lunghezza dell'arco semidiurno per il giorno in cui la declinazione è δ e la Latitudine è θ .

A questo punto proviamo ad immaginare che i due parametri, Declinazione e Latitudine, si modifichino.

Al diminuire della Latitudine l'arco PL si accorcia: il piano di traccia LA si avvicina al piano polare di traccia PD, mantenendosi sempre perpendicolare alla RC, e la parte eccedente 90° dell'arco AW' si accorcia, a parità di Declinazione.

Teofilo Bruni fa qualcosa di più, e immagina che la retta di declinazione MC sia la traccia di un cerchio massimo perpendicolare al piano meridiano costituito dal foglio: lo possiamo immaginare originato dal piano che

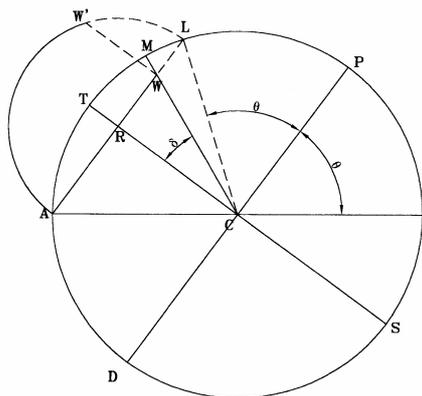


Figura 2

contiene il Sole a mezzogiorno e dalla linea Est/Ovest di traccia C. Se poi consideriamo che la declinazione del Sole varia di giorno in giorno, i piani che intersecano la sfera diventano un fascio che ha per asse la linea Est/Ovest.

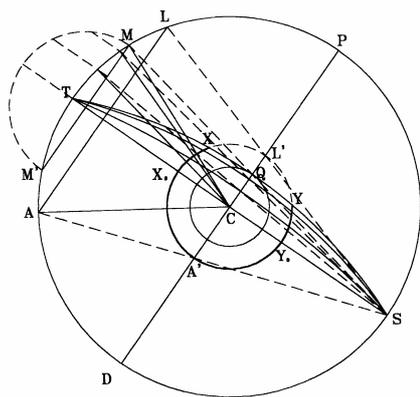


Figura 3

Ma Bruni non si accontenta, e successivamente costruisce la proiezione polare (si ispira ovviamente all'Astrolabio) sul diametro PCD del piano di traccia LA e di un certo numero di cerchi massimi di declinazione. Il polo di proiezione è S. (Figura 3)

La figura illustra il risultato dell'operazione; dalla proiezione dei punti del *manaeus*⁵⁷ si ottengono un certo numero di archi, corrispondenti alle declinazioni di ingresso nei Segni zodiacali; essi sono tutti contenuti nello spazio fra l'arco TQS e la retta TCS.

A rigore anche quest'ultima rappresenta un arco, quello di declinazione nulla.

Il cerchio che passa per L' ed A' è la proiezione del cerchio LA: in esso è stato evidenziato l'arco XA'Y, corrispondente alla lunghezza solstiziale del giorno per la Latitudine rappresentata dall'arco PL. Nella figura si osserva anche che l'arco diurno intersecato dai vari archi diminuisce fino a X₀A'Y₀, che corrisponde alla lunghezza del giorno di equinozio. Si potrebbe proseguire per la fase invernale del giorno, ma ovviamente la figura degli archi di declinazione sarebbe simmetrica, e quindi per l'inverno possiamo usufruire delle restanti parti dei cerchi, come per esempio XL'Y.

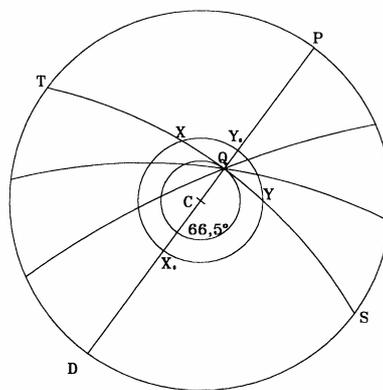


Figura 4

La figura successiva (Figura 4) illustra una ulteriore felice intuizione del Bruni. Egli ruota di 30° , 60° e 90° gli archi di declinazione (la retta TCS, interpretata come limite della "famiglia" di archi di cui TQS è l'altro estremo, è ruotata di 90° e si sovrappone alla retta PD) corrispondenti all'ingresso del Sole nei Segni zodiacali intermedi; gli archi sembrano passare tutti per il punto Q, mezz'ora dell'arco corrispondente alla declinazione massima. In realtà (e qui non lo dimostro per non dilungarmi, ma il curioso può vedere l'Appendice in fondo) se si fa una accurata analisi della geometria del problema, passano solo molto vicino. Bruni ha considerato senz'altro il punto Q come punto di coincidenza di tutte le curve, e lo ha sfruttato per il loro infittimento, costruendo, per esempio, tre (uno ogni dieci giorni) o più archi per ogni Segno

⁵⁷ Il termine *manaeus* è il nome, secondo il testo di Vitruvio, del grafo rappresentato nella Fig. 3 dal settore MCT, nel quale le tre rette uscenti da C rappresentano la declinazione del Sole nei punti di ingresso dei segni zodiacali. Il disegno della Fig. 3 è solo la metà "estiva" del grafo; l'altra metà è simmetrica rispetto alla retta TC. I costruttori francesi di orologi solari si avvalevano del *manaeus* (costruito in metallo e denominato *sciaterra*) per tracciare le linee di declinazione. Per una più accurata spiegazione si veda in *Gnomonica Italiana* l'articolo di Gianni Ferrari sul testo di Vitruvio. (*Gnomonica Italiana* N°6)

zodiacale, tutti ovviamente passanti per Q. Così, lungo il cerchio, è possibile indicare lo Zodiaco, o il calendario, associando quindi un arco di declinazione per ogni giorno dell'anno.

Per quanto riguarda le Latitudini, è possibile tracciare i cerchi proiezione corrispondenti a tracce simili ad LA, ed associare ad ognuno dei cerchi ottenuti il valore di Latitudine (la lunghezza dell'arco PL) che gli corrisponde. In sostanza, l'abaco proposto da Teofilo Bruni è la proiezione stereografica di un numero presumibilmente infinito di piani come AL della figura 2, corrispondenti a tutti i valori di Latitudine da 0° a 90°.

La **Figura 5** illustra il risultato di tale operazione. In essa ho evidenziato anche il cerchio corrispondente al circolo polare di Latitudine 66,5°, che non viene intersecato dall'arco TQS, perché corrisponde al Sole di mezzanotte nel giorno del solstizio.

Facendo un passo successivo, è possibile aggiungere un cerchio concentrico (nella figura, la corona più esterna) suddiviso in 24 parti, le ore, e determinare con il suo aiuto la lunghezza del giorno semplicemente con due fili tesi dal centro C per i punti di incrocio fra il cerchio corrispondente alla Latitudine desiderata e l'arco di declinazione del giorno. Ovviamente tale cerchio potrebbe essere suddiviso in gradi anziché in ore.

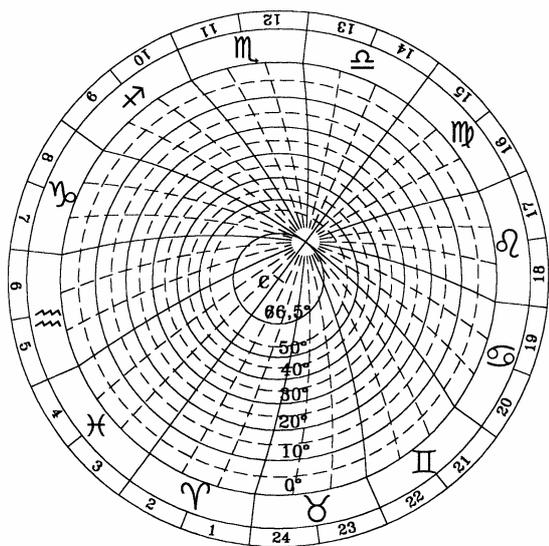


Figura 5

Teofilo Bruni non considera come strumento a sé quanto descritto, probabilmente perché trascura l'interesse pratico a conoscere la lunghezza del giorno al variare delle Latitudini.

Egli ne propone, per la verità in un testo tortuoso ed esitante, quasi non volesse farlo, un uso parziale, come notturnlabio (e qui sta la novità) ad ore italiane, in uno strumento portatile nel cui verso costruisce un orologio diurno d'altezza, anch'esso italiano, di sua invenzione.⁵⁸ Si

⁵⁸ Il testo del Bruni è piuttosto fumoso circa la proposta d'uso pratico dello strumento. Egli mette la trattazione del grafo in coda ad un capitolo in cui illustra, ma non spiega, un altro quadrante notturno, non universale, da lui denominato 'Zodiaco obliquo'. È nota l'esistenza di due esemplari di questo genere di orologio, probabilmente entrambi

avrebbe così uno strumento completo, utile per l'intera giornata.⁵⁹

Altra novità, è possibile con qualche artificio, per altro lasciato da Bruni alla fantasia del lettore, adattare lo strumento alle ore ineguali ed a quelle babilonesi.

La notevole inventiva dimostrata dall'autore nel "vedere" un particolare sviluppo dell'analemma, e successivamente nel farne la proiezione stereografica, è purtroppo in qualche modo mortificata dal modesto uso pratico proposto. Dopo avere inventato un regolo calcolatore valido per tutte le Latitudini, lo declassa ad una sola linea, a servizio di un orologio notturno.

Ma è pur sempre l'unico esempio di orologio notturno italico...

La proposta di ricostruzione dell'orologio italiano notturno che faccio qui di seguito non si trova nel testo del Bruni. Me ne assumo la responsabilità.

Rifacendoci alla **Figura 6**, è noto che il notturnlabio va tenuto con il manico ben verticale. Nel nostro caso non abbiamo manico, ma l'anello di sospensione lo può sostituire adeguatamente. Basta scegliere se lo vogliamo in alto o in basso. La posizione del grafo inventato dal Bruni

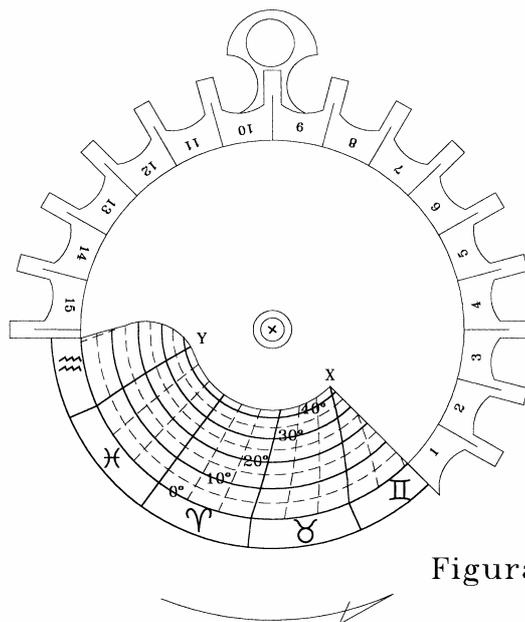


Figura 6

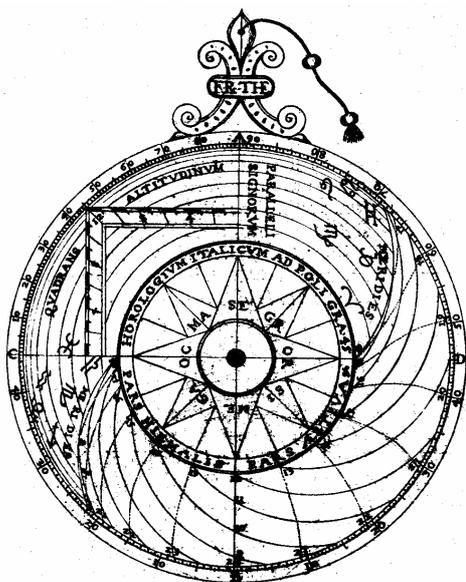
è necessariamente fissa, perché incisa sul disco di base. Questa limitazione fa perdere l'universalità all'orologio, perché bisogna considerare il complesso rapporto fra le date, la posizione della stella (che qui non scelgo) e quelle

costruiti dallo stesso Bruni. Uno si trova nella Biblioteca Classense di Ravenna, ed un secondo nel museo dell'Arsenale di Venezia. Per il primo si rimanda il lettore all'articolo di Mario Araldi in *Gnomonica Italiana* N° 2. Preciso che su di esso è tracciato lo Zodiaco obliquo. Anche la notizia circa il secondo orologio mi è stata data da Mario Araldi.

⁵⁹ All'epoca si costruivano strumenti di questo genere, diurni su una faccia e notturni sull'altra. Valga per tutti lo strumento costruito da Giovanni Paolo Cimerlino, (Verona -circa 1560?) di cui il lettore può trovare illustrazione nel libro 'Segnatempo Veronensis' -Verona 1987, di Paolo Francesco Forlati. Dal libro del Forlati il lettore può trarre molte utili indicazioni sull'origine del notturnlabio, attribuita all'Arcidiacono Pacifico (776-844 d.C.).

che si chiamavano *discensioni oblique* del Sole. Il grafo compensa il variare di queste ultime, creando così il necessario automatismo dello spostamento del punto di inizio del conteggio in relazione alla data, ma è necessario considerare il punto di eclittica in cui si trova la Stella prescelta in relazione al Sole di Ariete o di Libra, perché in queste date la corrispondente linea del grafo è una retta, e le discensioni retta ed obliqua del Sole coincidono, facilitando la messa a punto dello strumento. Da questo rapporto nasce l'assetto da conferire al grafo (in pratica l'angolo della linea di Ariete e Libra rispetto ad una ipotetica linea orizzontale) perché posizione della stella e data siano coerenti.

Poi si sovrappone una volvella che copra parzialmen-



te il quadrante con un arco di cerchio XY corrispondente per esempio alla Latitudine dell'orologio diurno che si trova sull'altra faccia, dotata di numero di settori orari pari all'incirca alla notte più lunga. Nella figura, l'arco XY corrisponde a 45°, e le ore sono 15.

Il punto X va posto, giorno per giorno, sull'arco di declinazione corrispondente alla data (nell'illustrazione sta sulla fine di Toro, ma al posto dei Segni zodiacali è possibile introdurre le date).

Il notturnabio va notoriamente orientato in modo di osservare la Stella Polare nel foro centrale, osservando con-

temporaneamente la posizione della Stella scelta quale indicatore orario, semplicemente facendo riferimento ai risalti costruiti nel bordo della volvella.

Variando la data, varia ovviamente, come in tutti i notturnabi, il punto di partenza per contare le ore, e la disposizione degli archi di declinazione adatta automaticamente lo strumento al punto di tramonto del giorno.

I risalti del bordo permettono anche di contare le ore al buio.

L'orologio diurno d'altezza sito nel recto dello strumento, e proposto dall'Autore, merita due parole, anche se lo trovo poco intuitivo per l'utente, rispetto ad altri orologi portatili. Probabilmente il mio discutibile parere è stato condiviso, tant'è che le proposte di Brunni non hanno avuto seguito concreto. Nulla da ridire sull'aspetto estetico, veramente superbo.

L'orologio, costruito per la latitudine di 45° ed esportabile solo per latitudini superiori, è un disco suddiviso in tre parti: due settori di 90° a sinistra di chi guarda, e a destra uno di 180°.

Il settore alto di sinistra è un quadrante d'altezza come tanti, con tanto di alidada (non indicata, ma il lettore può immaginarla), per misurare l'altezza del Sole. Può essere dotato o meno del diagramma delle *umbrae*.

La novità sta nei quadranti residui (che sembrano uno solo, ma sono due), con le graduazioni che partono dal basso: quello di sinistra vale per il periodo invernale, e quello di destra per il periodo estivo. Su entrambi la graduazione del bordo è "doppia", vale a dire che l'autore ha scritto 45° in luogo di 90° e 90° in luogo di 180°... Gli archi concentrici che appaiono nella parte alta sono le date; nel disegno i Segni zodiacali. La sua costruzione avviene mediante tabelle di corrispondenza fra ore e altezza del sole.

L'operazione di lettura dell'ora avviene così: si legge l'altezza del Sole nel quadrante alto a sinistra e poi la si riporta con l'alidada sul bordo di uno degli altri due, a seconda della stagione. Le ore si leggono dove l'alidada attraversa le linee orarie, in corrispondenza della data (o della frazione di segno zodiacale). Il datario costituito dagli archi di cui si è detto è riportato anche sul bordo dell'alidada. Come si vede, la praticità e la rapidità sono piuttosto dubbie; non è certo un cronometro...

Appendice

NOTA per i critici "geometrici", che sono pochi e tendono a zero.

DIMOSTRAZIONE di come e perché le curve ruotate di x° **non passino** per il vertice dell'arco di declinazione massima.

Prima occorre verificare una circostanza, che è normalmente data per scontata, ma non lo è (Teodosio insegna):

Nella FIGURA dimostrare che l'arco MR del cerchio MGM' sottende lo stesso angolo al centro dell'arco MS del cerchio massimo MHA'.

La figura è costruita secondo i seguenti criteri:

MGM' è un cerchio qualsiasi della sfera, tangente in M al cerchio massimo MHA'

CHC' è un cerchio massimo che ha per diametro la retta FE che unisce i centri dei due cerchi precedenti e contiene le perpendicolari EH ed FG ai raggi MF ed ME degli stessi ed alla retta FE. In altri termini, gli archi MG ed MH valgono 90°.

DSD', il cui punto D è un punto qualsiasi dell'arco CM, è un cerchio parallelo al cerchio massimo CHC'.

Di conseguenza:

PQ è parallela ad FE

PS e QR sono parallele ad EH ed a FG.

Nel triangolo rettangolo MFE : $MP/ME = MQ/MF$

Se ne conclude che i rapporti valgono anche per gli archi relativi ai segmenti suddetti, nei rispettivi quadranti:

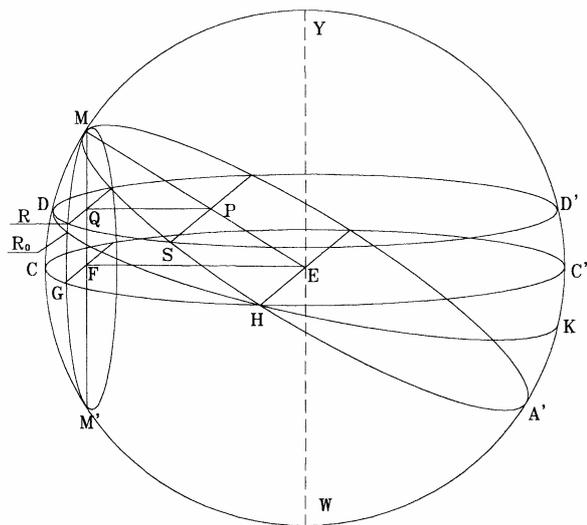
$$MR/MG = MS/MH.$$

E quindi i rispettivi angoli al centro di MR ed MS sono uguali. Questa proprietà giustifica la costruzione del MANAEUS.

Passiamo alla dimostrazione dell'argomento.

Diciamolo: MHA' è l'eclittica, ma qui per evidenziare quello che ci interessa, l'abbiamo fatta declinare più del giusto rispetto all'equatore CHC'.

Il cerchio MGM' è il cerchio il cui ribaltamento serve



per costruire il *manaeus*.

Il parallelo DSD' corrisponde alla posizione del Sole nel punto S lungo l'eclittica. Quindi l'arco MR vale $(MS)^\circ$.

Se si costruisce il cerchio massimo DHK appartenente allo stesso fascio, la sua intersezione R_0 con il cerchio MGM' non corrisponde al punto R. Quindi l'arco MR_0 non può valere $(MS)^\circ$, ma è più grande.

Conseguenza: se ruoto di $(MS)^\circ$, intorno al diametro FE (come ha fatto BRUNI), l'insieme rigido costituito dal cerchio MRM' e dal cerchio massimo DHK, il cerchio MRM' scivola lungo se stesso: quindi sia R che R_0 scorrono lungo la circonferenza. Il punto R_0 appartenente al cerchio non si può sovrapporre sicuramente al punto M, perché è il punto R a sovrapporsi, e R non appartiene a DHK... eccetera.

Passiamo ai numeri: se l'arco $(MR) = 30^\circ$, l'arco (MR_0) vale circa 32° . La differenza di circa 2° si mantiene pressoché costante fra 30 e 60 gradi.

Nelle altre zone non mi sono preoccupato di appurare le differenze.