LA MATEMATICA NASCOSTA DI ALCUNI STRUMENTI MECCANICI PER LA PROGETTAZIONE DI OROLOGI SOLARI PIANI

PIER GIUSEPPE LOVOTTI

ESTRATTO

Si esaminano in modo dettagliato alcuni strumenti utilizzati nel passato per il progetto di orologi solari piani, mettendo in evidenza come in effetti essi risolvano di volta in volta le note formule.

Breve premessa teorica. Negli ultimi decenni del XIX secolo si è sviluppata, soprattutto da parte del francese M. D'Ocagne, quel ramo della matematica applicata che lui stesso designò come *nomografia*, da intendersi come la teoria generale dei metodi di rappresentazione geometrica delle leggi di dipendenza fra due o più variabili, in modo che, fissate le altre, seppur con approssimazione si possa conoscere quella voluta per semplice lettura, eventualmente interpolata. Soluzioni grafiche di problemi numerici specifici erano note già da tempi molto precedenti, ma tutti questi metodi furono unificati nella teoria generale dovuta principalmente al D'Ocagne.

Mettiamo qui in evidenza alcuni argomenti della nomografia che ci saranno utili nel prosieguo.

Scale funzionali: su una linea qualsiasi γ si fissa un'origine O, un verso positivo e un'unità di misura *m*

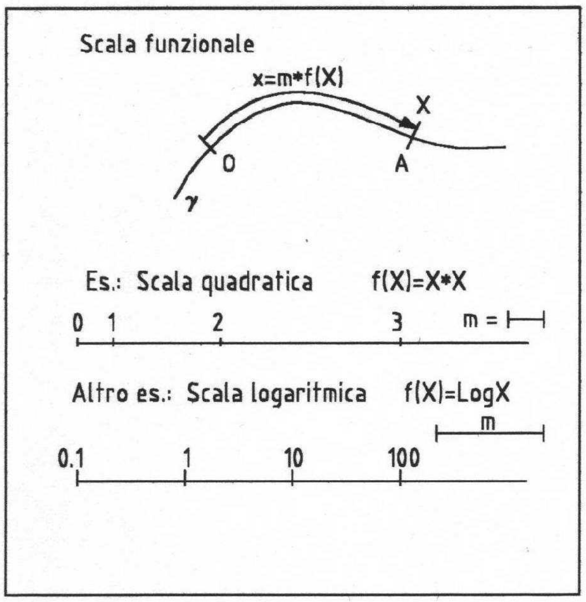

Fig. 1 Definizione ed esempi di scala funzionale

(modulo) per la sua ascissa curvilinea. Sia f(X) una funzione monodroma e sia $x = m \cdot f(X)$; si ha una scala funzionale se ad ogni punto A di γ di ascissa curvilinea x si fa corrispondere la quota X.

$x = m \cdot f(X)$ è l'equazione della scala

Gli abachi sono dei grafici per mezzo dei quali si rappresentano funzioni con delle curve molto semplici (rette, cerchi, etc.) usando per assi scale funzionali adeguate. Abachi semplici sono quelli cartesiani e quelli polari; ad esempio in Fig. 2 è l'abaco polare dell'Equazione del Tempo.

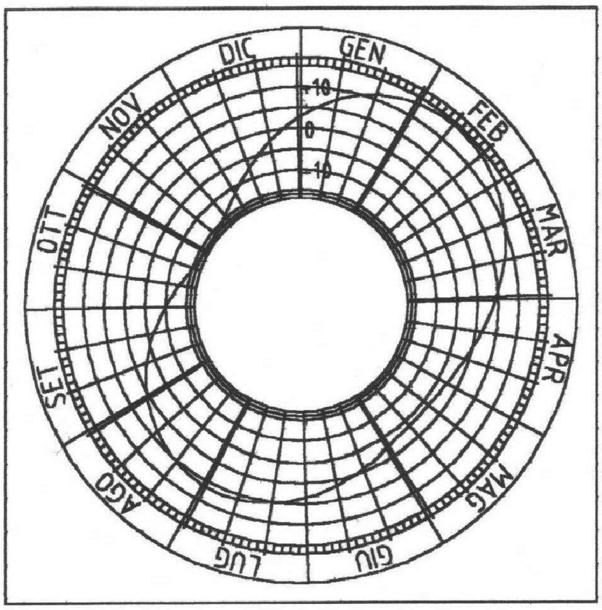

Fig. 2 Abaco polare dell' Equazione del Tempo

Ai nostri fini sono importanti i nomogrammi a punti allineati. Questi si ottengono quando, data una equazione $f(X,Y,Z)=0$, si trovano tre curve $\gamma 1$, $\gamma 2$, $\gamma 3$, opportunamente graduate in modo che, comunque si prenda una retta *r*, le quote Xo, Yo, Zo dei tre punti M1, M2, M3 in cui la retta *r* taglia le tre curve, soddisfano la $f(X,Y,Z)=0$.

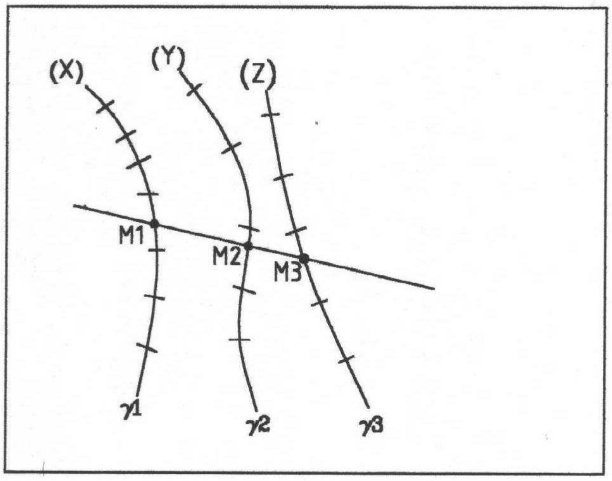

Fig. 3 Nomogramma a punti allineati

Questi nomogrammi sono semplici e pratici, soprattutto per la facilità e precisione con cui si può effettuare l'interpolazione sulle linee graduate.

Ciascuna delle curve γ può essere espressa in forma parametrica e conseguentemente i vari punti M possono esprimersi secondo le proprie coordinate cartesiane dipendenti dal parametro, che coincide con la quota; avremo così:

$$M1 \equiv [x1(X), y1(X)]$$

$$M2 \equiv [x2(Y), y2(Y)]$$

$$M3 \equiv [x3(Z), y3(Z)]$$

Dall'algebra lineare si sa che condizione per l'allineamento dei tre punti è che:

$$\begin{vmatrix} x1(X) & y1(X) & 1 \\ x2(Y) & y2(Y) & 1 \\ x3(Z) & y3(Z) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

cioè, in definitiva, si deve riuscire a scrivere la $f(X,Y,Z)=0$ nella forma indicata dalla condizione sopradetta; questo è praticamente possibile quasi sempre e spesso anche in più di un modo.

Descriviamo ora alcuni strumenti meccanici concepiti per il progetto di orologi solari; questi oggetti forniscono, senza la necessità di alcun calcolo, le grandezze necessarie per la costruzione dell'orologio oppure che sono di ausilio alla disegnazione diretta dell'orologio sul suo quadro.

Il cerchio di Daniel Foster: con esso si ricavano i dati necessari per costruire orologi solari piani, orizzontali e verticali declinanti. E'un cerchio (Fig. 4.) in cui si identificano cinque scale: la semicirconferenza di sinistra è suddivisa in 90 moduli, ciascuno di ampiezza di 2°. A partire dagli estremi della semicirconferenza, la quota è indicata ad ogni decina; in effetti questa è una scala doppia, quella in senso orario e quella in senso antiorario.

La seconda scala si trova sul diametro verticale del cerchio, parte a destra. I vari punti di questa scala si ottengono quali punti di intersezione fra il diametro stesso e la congiungente i punti della semicirconferenza a sinistra con il punto centrale della semicirconferenza a destra. La quota dei punti così individuati è la stessa dei punti della semicirconferenza di sinistra (percorsa in senso antiorario) dai quali si parte.

La terza scala è una scala affacciata (è la parte a sinistra) alla seconda e le sue quote sono le stesse della seconda scala divise per 15: questa terza scala dà l'indicazione delle ore quando la seconda dà l'angolo orario.

La quarta scala è sul quadrante superiore destro del cerchio; l'angolo formato dai vari punti di questo quadrante superiore, a partire dal punto più alto del cerchio, è tale da soddisfare $x = \arctan(\sin X)$, con la quota $X_{MAX} = 90°$ cui corrisponde l'angolo $x_{MAX} = \pi/4 \Rightarrow 45°$.

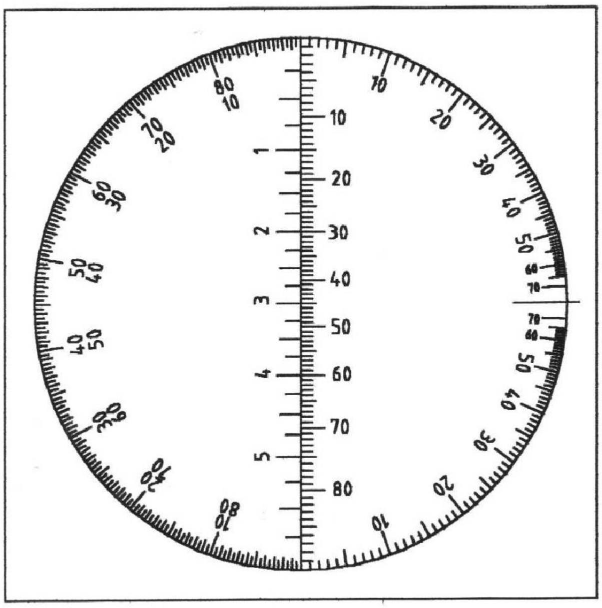

Fig. 4 Il cerchio di Daniel Foster

La quinta scala è la simmetrica della quarta, rispetto ad un asse orizzontale centrale.

Caratterizziamo ogni scala dettagliatamente sia in modo geometrico che analitico facendo riferimento al sistema d'assi cartesiani di Fig.5, valevole per tutte le scale.

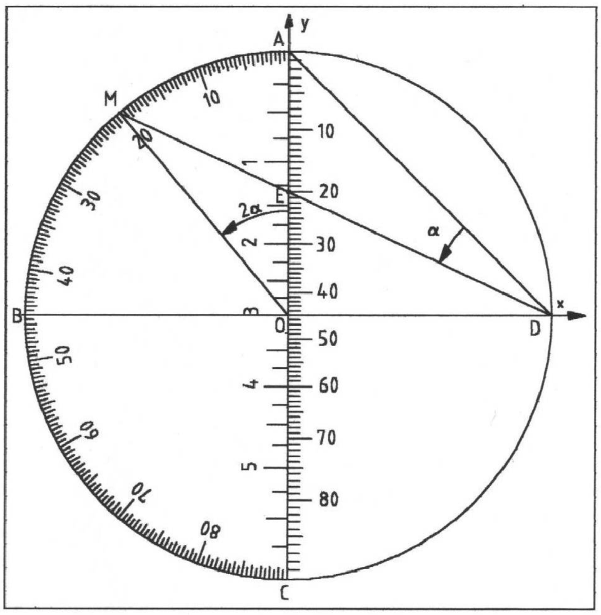

Fig.5 Prima (solo l'antioraria), seconda e terza scala

Nella Fig.5 è rappresentata la prima scala (solo quella antioraria); essa ha origine in A e definisce sulla semicirconferenza di sinistra la corrispondenza con l'ampiezza dell'angolo α (e 2α).

Detto R il raggio del cerchio, le coordinate di M sono:

$$x1 = -R \cdot \sin 2\alpha \qquad y1 = +R \cdot \cos 2\alpha$$

con $0 < \alpha < 90°$. α coincide con l'angolo orario H.

Per la scala in senso orario, che ha per retta di origine degli angoli α quella passante per D e C, le coordinate sono: $x1 = -R \cdot \sin 2\alpha \qquad y1 = -R \cdot \cos 2\alpha$

Sempre dalla Fig. 5 si vede come viene generata la seconda scala: la stessa retta DM, che definisce l'apertura dell'angolo α = H, incontra il diametro AC nel punto E, la cui quota è la stessa del punto M della prima scala.
Le coordinate del punto E sono:

$$x2 = 0 \qquad y2 = R \cdot \tan(45° - \alpha)$$

con $0 < \alpha < 90°$.
La terza scala è affacciata alla seconda ed è la scala delle ore: i suoi punti sono identificati semplicemente dai corrispondenti a destra divisi per 15.

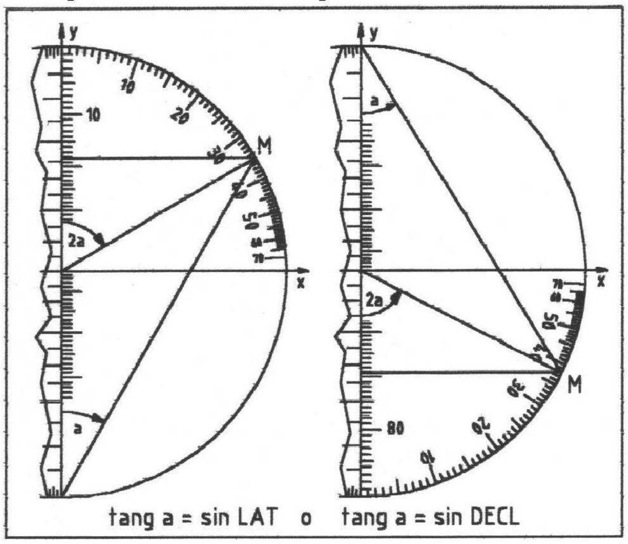

Fig. 6 Quarta e quinta scala

La quarta e la quinta scala sono rappresentate in Fig. 6; esse sono simmetriche rispetto all'asse x . Riferendoci alla scala nel quadrante superiore, gli archi, a partire dall'asse y, e individuati dal punto di incontro della retta che forma l'angolo di ampiezza *a*, sono contraddistinti dalla quota $Arco = \arcsin[\tan(a)]$. Come vedremo, Arco, di volta in volta, sarà la Latitudine o la Declinazione della parete.
Le coordinate del punto M sono:

$$x3 = R \cdot \sin 2a \qquad y3 = R \cdot \cos 2a$$

con $0 < a < 45°$
Per la scala quinta, quella del quadrante inferiore, le coordinate del punto M sono invece:

$$x3 = R \cdot \sin 2a \qquad y3 = -R \cdot \cos 2a$$

Come si usa il cerchio di Foster e sua giustificazione.
L'uso dello strumento è molto semplice: si tratta di congiungere con una retta due punti noti su due scale, prolungare la retta fino ad una terza scala sulla quale leggere il risultato. Vediamo le procedure per gli orologi ad ora vera locale, sia orizzontale che verticale declinante. Per l'orologio orizzontale l'unico dato che é noto in partenza è la Latitudine LAT del sito. E' poi risaputo che l'elevazione ε dello stilo è uguale alla latitudine, che la retta meridiana coincide con la retta Sud-Nord, che le rette orarie sono simmetriche rispetto al mezzogiorno; rimane solo da calcolare l'angolo che le rette orarie formano con la meridiana.
Per far questo si individua sul quadrante destro inferiore il punto relativo alla latitudine del sito; si congiunge tale punto con il punto sulla scala delle ore (terza scala) relativo all'ora che interessa (tenendo conto che il mezzogiorno è l'ora 0, che 1 corrisponde alle 13 e alle 11, e così via) e si prolunga la retta fino ad incontrare la scala antioraria sulla semicirconferenza di sinistra, e qui si legge il valore dell'angolo, cercato, che la retta oraria forma con la meridiana. Nella Fig.7 sono mostrate, per esempio, tre rette: per LAT=40°, si leggono per le ore 11 (e 13) 9.75°, per le 10 (e 14), 20.3°, e per le 7 (e 17) 67.4°.

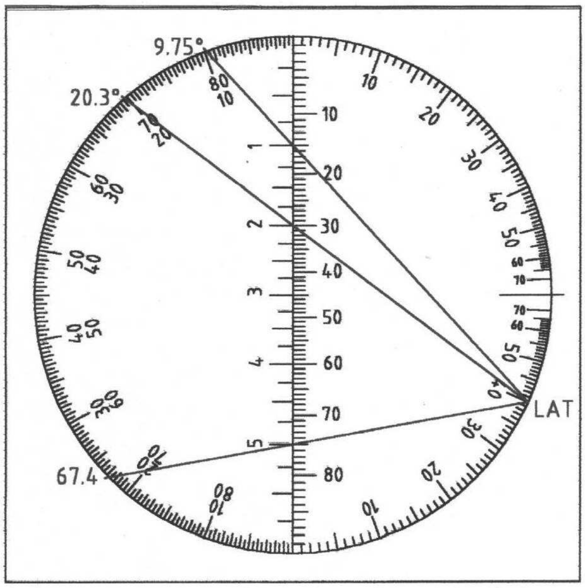

Fig. 7 Esempio di calcolo col cerchio di Foster degli angoli di alcune rette orarie di un orizzontale

E' molto semplice verificare che la condizione indicata nella premessa teorica è soddisfatta, ma, a questo, si preferisce fare una dimostrazione che metta chiaramente in evidenza che le operazioni grafiche effettuate sono tali da fornire in effetti il risultato della formula analitica corrispondente, in questo caso

$$\tan(\omega) = \tan(H) \cdot \sin(LAT)$$

con ω angolo fra la linea meridiana e la retta oraria relativa all'angolo orario H
Nella Fig.8 per chiarezza dimostrativa, è rappresentato il cerchio di Foster ma senza il dettaglio delle scale; si è tracciata la retta che parte dal punto Q che è il valore della latitudine del sito, e passa per il punto T che rappresenta l'angolo orario per il quale si vuol conoscere l'angolazione della retta oraria rispetto alla meridiana. Questo valore si ottiene, come abbiamo visto leggendolo dove la prosecuzione della retta per Q e T incontra la semicirconferenza di sinistra, nel punto P. Sempre nella Fig.8 si sono evidenziati gli angoli che caratterizzano le tre scale che qui sono in gioco; si può così vedere che:

$$T\hat{D}O = 45° - H$$

$$OT = R \cdot \tan(45° - H) = R \cdot \frac{1 - \tan H}{1 + \tan H}$$

$$P\hat{O}Q = 2\alpha + 90° + (90° - 2a) = 180° + 2\alpha - 2a$$

$$P\hat{O}K = P\hat{O}Q/2 = 90° + \alpha - a \qquad O\hat{P}K = a - \alpha$$

$$T\hat{O}K = P\hat{O}K - 2\alpha \qquad O\hat{T}K = 90° - T\hat{O}K = \alpha + a$$

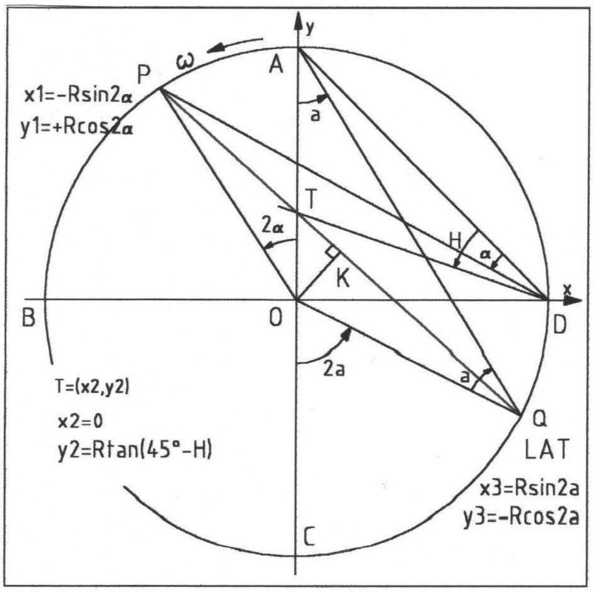

Fig. 8 Figura per la dimostrazione della formula di ω

$$OK = R \cdot \sin(a - \alpha)$$

$$OT = \frac{OK}{\cos(T\hat{O}K)} = R \cdot \frac{\sin(a-\alpha)}{\sin(a+\alpha)}$$

Uguagliando ora le lunghezze di OT trovate nei due modi diversi e tenendo conto che l'angolo α coincide con la quota ω, si ottiene:

$$\frac{1-\tan H}{1+\tan H} = \frac{\sin(a-\alpha)}{\sin(a+\alpha)} = \frac{\sin a \cdot \cos\omega - \cos a \cdot \sin\omega}{\sin a \cdot \cos\omega + \cos a \cdot \sin\omega}$$

$$\frac{1-\tan H}{1+\tan H} = \frac{1-\cos a \cdot \sin\omega / \sin a \cdot \cos\omega}{1+\cos a \cdot \sin\omega / \sin a \cdot \cos\omega} = \frac{1-\tan\omega/\tan a}{1+\tan\omega/\tan a}$$

da cui:

$$\tan H = \frac{\tan\omega}{\tan a} = \frac{\tan\omega}{\sin LAT}$$

cioè, finalmente:

$$\boxed{\tan\omega = \tan H \cdot \sin LAT}$$

Per <u>l'orologio verticale declinante</u> i dati di partenza sono la latitudine del sito LAT e la declinazione gnomonica del quadro DECL. Il progetto di un verticale declinante mediante l'uso del cerchio di Foster prevede una precisa sequenza operativa di passi successivi che utilizzano due dei dati, o noti o trovati; i passi ricavano:

1. Angolo σ fra retta substilare e retta meridiana
2. Angolo orario H_{SUBST} della substilare
3. Angolo ε di elevazione dello stilo
4. Angolo ω fra rette orarie e substilare

A titolo di esempio ci si riferisce ad un orologio verticale sito a LAT=46° con DECL=30° Est.

<u>Angolo σ fra retta substilare e retta meridiana.</u> (Fig.9)

Si traccia la retta che congiunge il valore della DECL preso sul quadrante destro superiore con il valore della LAT sulla semicirconferenza di sinistra letta in senso orario; sul diametro verticale, scala di destra, si rileva così il valore di $\sigma \approx 25.8°$

Si ricorda che quando DECL > 0 (declinazione Ovest), la substilare è alla destra della retta meridiana, e quando

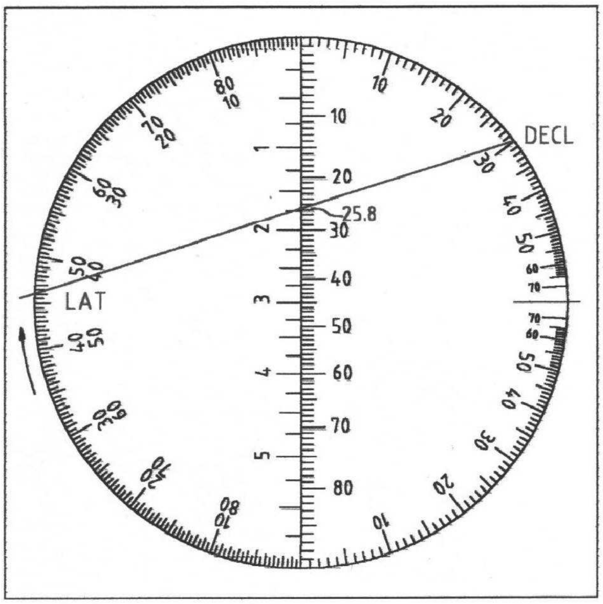

Fig. 9 Esempio di rilievo del σ, angolo fra substilare e meridiana, nel caso di LAT=46° e DECL=-30°.

DECL < 0 (declinazione Est), la substilare è alla sinistra della retta meridiana.

Dalla Fig.10, in modo del tutto analogo alla precedente dimostrazione, si ottengono le relazioni che portano alla formula di calcolo dell'angolo σ. Si ha:

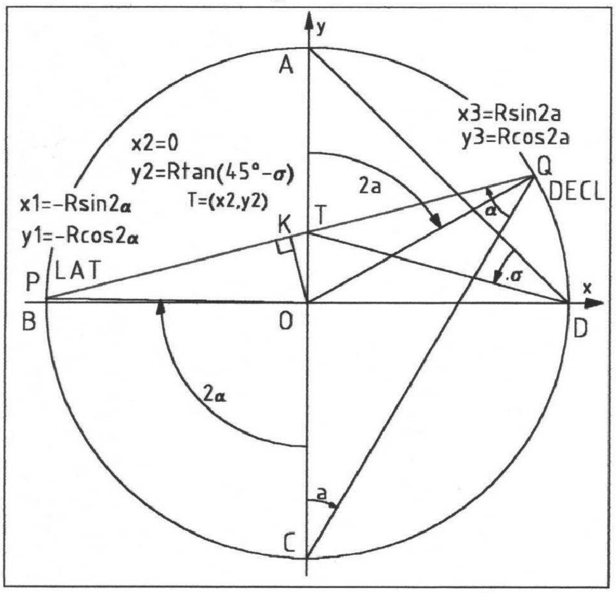

Fig. 10 Esplicitazione delle scale per la dimostrazione della formula del σ

$$C\hat{Q}P = \alpha = LAT \qquad C\hat{Q}O = a \qquad \tan a = \sin LAT$$

$$O\hat{Q}K = \alpha - a \qquad K\hat{O}Q = 90° - (\alpha - a)$$

$$K\hat{O}T = K\hat{O}Q - 2a = 90° - \alpha - a \qquad K\hat{T}O = \alpha + a$$

$$OK = R \cdot \sin O\hat{Q}K = R \cdot \sin(\alpha - a)$$

$$OT = OK \cdot \sin K\hat{T}O = R \cdot \frac{\sin(\alpha - a)}{\sin(\alpha + a)}$$

$$OT = R \cdot \tan O\hat{D}T = R \cdot \tan(45° - \sigma) = R \cdot \frac{1-\tan\sigma}{1+\tan\sigma}$$

$$\frac{1-\tan\sigma}{1+\tan\sigma}=\frac{\sin(\alpha-a)}{\sin(\alpha+a)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos a-\cos\alpha\cdot\sin a}{\sin\alpha\cdot\cos a+\cos\alpha\cdot\sin a}$$

$$\frac{1-\tan\sigma}{1+\tan\sigma}=\frac{1-\cos\alpha\cdot\sin a/\sin\alpha\cdot\cos a}{1+\cos\alpha\cdot\sin a/\sin\alpha\cdot\cos a}=\frac{1-\tan a/\tan\alpha}{1+\tan a/\tan\alpha}$$

$$\tan\sigma=\frac{\tan a}{\tan LAT} \qquad \boxed{\tan\sigma=\frac{\sin DECL}{\tan LAT}}$$

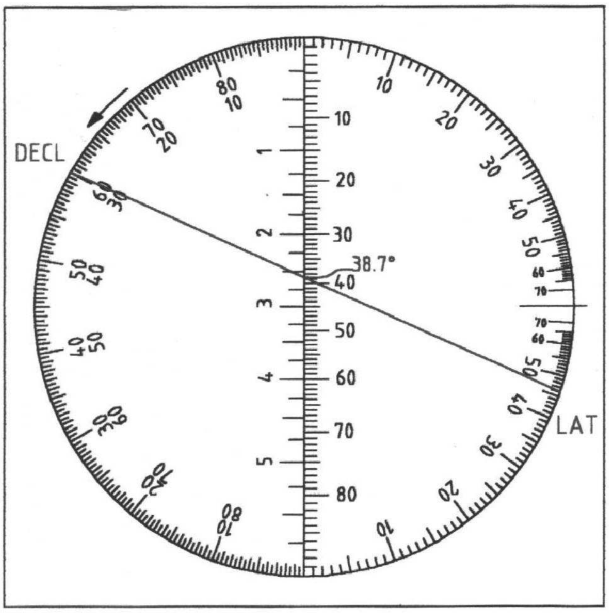

Fig. 11 Esempio di rilievo dell'angolo orario e dell'ora della substilare , nel caso di LAT=46° e DECL=-30°.

Angolo orario H_{SUBST} della substilare (Fig.11)

Si traccia la retta che congiunge il valore della LAT, preso sul quadrante destro inferiore, con il valore della DECL sulla semicirconferenza di sinistra, letta in senso antiorario; sul diametro verticale, scala di destra, si rileva così il valore dell'H_{SUBST} della substilare, nel nostro esempio pari a 38.7°. Poiché l'orologio dell'esempio è declinante verso Est (DECL<0), la substilare è a sinistra della retta meridiana, quindi l'ora substilare è antimeridiana e pari a 38.7/15 = 2.58 ore prima del mezzogiorno vero locale, cioè 9.42 ore ➔ 9h 25m. Il valore di 2.58 si può rilevare direttamente sulla scala affiancata (scala sinistra del diametro verticale).

Dalla Fig.12 si ottengono le relazioni che portano alla formula di calcolo dell'angolo orario della substilare. Si ha:

$$\tan a=\sin LAT \qquad \alpha=DECL$$

$$P\hat{O}Q=2\alpha+180°-2a \qquad P\hat{O}K=\frac{P\hat{O}Q}{2}=90°+\alpha-a$$

$$T\hat{O}K=P\hat{O}K-2\alpha=90+\alpha-a+2\alpha=90-(\alpha+a)$$

$$O\hat{T}K=\alpha+a \qquad O\hat{Q}K=O\hat{P}K=a-\alpha$$

$$OT=R\cdot\tan(45°-H_{SUBST})=R\cdot\frac{1-\tan H_{SUBST}}{1+\tan H_{SUBST}}$$

$$OK=R\cdot\sin(a-\alpha) \qquad OT=\frac{OK}{\cos(T\hat{O}K)}=R\cdot\frac{\sin(a-\alpha)}{\sin(a+\alpha)}$$

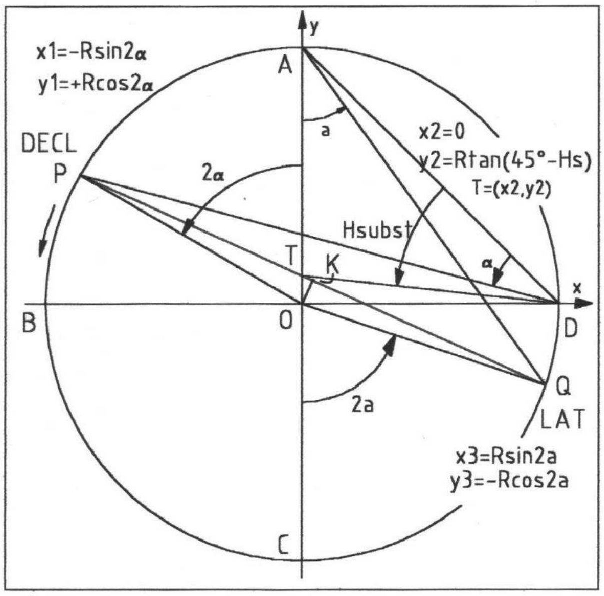

Fig. 12 Esplicitazione delle scale per la dimostrazione della formula dell'angolo orario della substilare

$$OT=R\cdot\frac{\sin a\cos\alpha-\cos a\sin\alpha}{\sin a\cos\alpha+\cos a\sin\alpha}=$$
$$=R\cdot\frac{1-\tan\alpha/\tan a}{1+\tan\alpha/\tan a}$$

e infine, uguagliando gli OT, la formula:

$$\boxed{\tan H_{SUBST}=\frac{\tan DECL}{\sin LAT}}$$

Elevazione dello stilo ε (Fig.13)

Si traccia la retta che congiunge il valore (90°- H_{SUBST}), preso sul quadrante destro superiore, con il valore della LAT sulla semicirconferenza di sinistra, letta in senso orario; sul diametro verticale, scala di destra, si rileva così

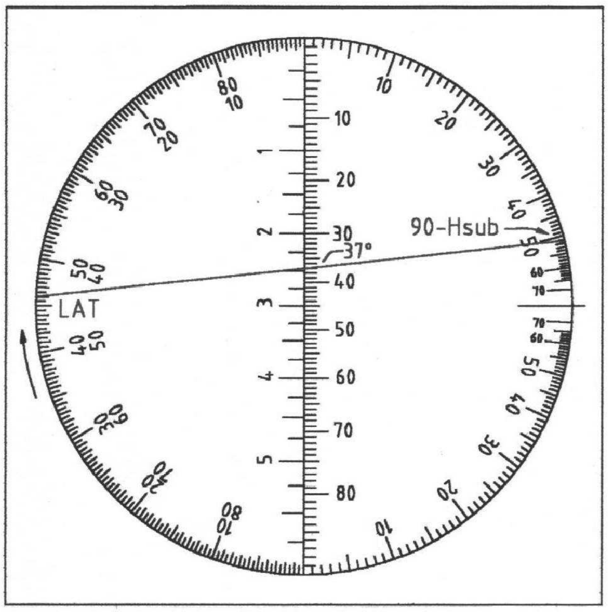

Fig. 13 Esempio di rilievo dell'angolo ε di elevazione stilo, nel caso di LAT=46° e DECL=-30°.

il valore ε di elevazione dello stilo, che nel nostro esempio risulta 37°.

La formula che dà l'elevazione ε dello stilo è:

$$\boxed{\tan\varepsilon = \frac{\sin(90° - H_{SUBST})}{\tan LAT}}$$

Mutatis mutandis, cioè, qui, gli argomenti delle funzioni trigonometriche, questa formula è la stessa dell'angolo della substilare precedentemente vista, perciò, per la dimostrazione, a quella si rimanda.

Angolo ω fra una retta oraria e la substilare (Fig.14)

Si congiunge il punto sul quadrante destro inferiore che individua l'angolo di elevazione ε dello stilo con il punto della scala alla destra sul diametro verticale che individua il valore $H - H_{SUBST}$, cioè l'angolo orario relativo alla retta oraria che si vuole, diminuito dell'angolo orario della substilare; il prolungamento di questa retta fin sulla semicirconferenza sinistra, con lettura in senso antiorario, individua il punto che rappresenta l'angolo ω fra la retta oraria voluta e la substilare. Si ricorda che quando la DECL è negativa (verso Est) la substilare è alla sinistra della retta meridiana e l'ora substilare $H_{SUBST} < 0$ cioè è un'ora antimeridiana; viceversa quando DECL è positiva (verso Ovest) la substilare è alla destra della retta meridiana e l'ora substilare $H_{SUBST} > 0$ cioè è un'ora pomeridiana: DECL e H_{SUBST} hanno sempre lo stesso segno, e di questo segno va tenuto conto nel calcolare il valore di $H - H_{SUBST}$. Inoltre, per quei valori di H per i quali $H - H_{SUBST} < 0$, si deve operare sul cerchio di Foster con il valore assoluto di $(H - H_{SUBST})$, e considerare poi negativo il valore di ω così individuato. Per i valori di $H - H_{SUBST} > 90°$, operare con il valore

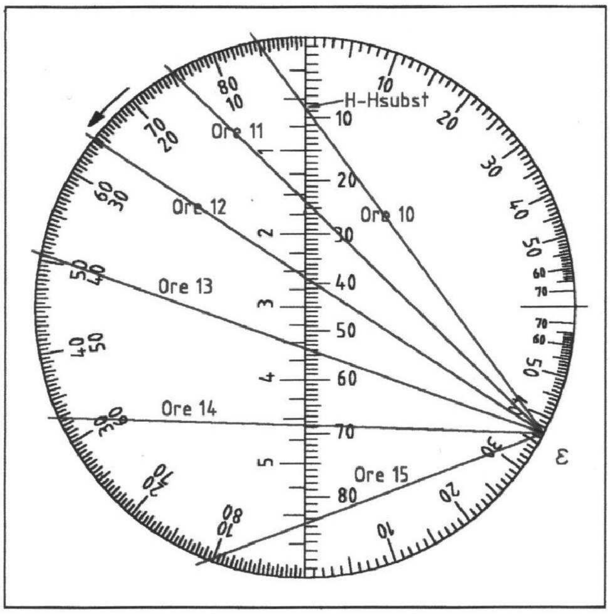

Fig. 14 Esempio di rilievo degli angoli ω fra retta oraria e substilare

supplementare $180 - (H - H_{SUBST})$, ottenere il risultato ω, e il valore corretto è il valore 180-ω.

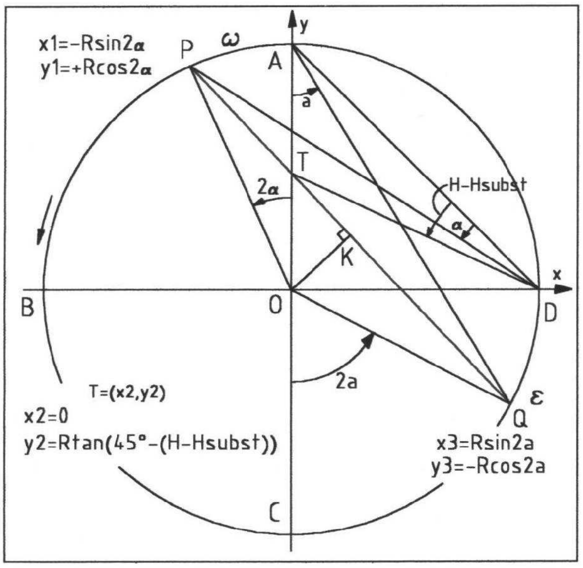

Fig. 15 Esplicitazione delle scale per la dimostrazione della formula dell'angolo ω retta oraria/substilare

Dalla Fig.15 si ottengono le relazioni che portano alla formula di calcolo dell'angolo ω fra una retta oraria di angolo orario H e la substilare. In analogia ai casi precedenti, si ha, :

$$\Delta H = H - H_{SUBST} \qquad \alpha = \omega \qquad \tan a = \sin\varepsilon$$

$$P\hat{O}Q = 2\alpha + 180 - 2a \qquad POK = POQ/2 = 90 - (a - \alpha)$$

$$O\hat{P}K = O\hat{Q}K = 90 - [90 - (a - \alpha)] = a - \alpha$$

$$OK = R \cdot \sin(a - \alpha)$$

$$K\hat{O}T = 90 - (a + \alpha) \qquad O\hat{T}K = 90 - K\hat{O}T = a + \alpha$$

$$OT = R \cdot \tan(45 - \Delta H) = R \cdot \frac{1 - \tan\Delta H}{1 + \tan\Delta H}$$

$$OT = \frac{OK}{\sin O\hat{T}K} = R \cdot \frac{\sin(a - \alpha)}{\sin(a + \alpha)} = \frac{1 - \tan\alpha/\tan a}{1 + \tan\alpha/\tan a}$$

$$\tan\Delta H = \frac{\tan\alpha}{\tan a} = \frac{\tan\omega}{\sin\varepsilon}$$

$$\boxed{\tan\omega = \tan(H - H_{SUBST}) \cdot \sin\varepsilon}$$

Nella tabella sono riepilogati i dati trovati per l'esempio sull'orologio verticale.

Riepilogo risultati dell'orologio verticale dell'esempio LAT = 46° DECL=-30° (Est)			
Angolo Substilare/Meridiana σ =			25.8°
Angolo orario della substilare Hsubst =			-38.7°
Angolo di elevazione dello stilo ε =			37.0°
Angolo Rette Orarie/ Substilare ω	Ore	H (°)	ω (°)
	6	-90	-36.8
	7	-75	-23.8
	8	-60	-13.2
	9	-45	-3.7
	10	-30	5.2
	11	-15	14.3
	12	0	25.8
	13	+15	39.3
	14	+30	57.1
	15	+45	79.6
	16	+60	104.3

Descrizione ed uso del cerchio di Samuel Foster risalgono al 1638; vent'anni più tardi vengono presentati da parte di George Serle degli strumenti meccanici, sostanzialmente dei regoli, con i quali era possibile disegnare orologi solari piani direttamente su ogni tipo di parete.

Le scale di Serle: Per brevità ci si limita all'esame del regolo più semplice, quello per disegnare l'orologio orizzontale: esso consiste essenzialmente in un'asta lunga qualche decina di centimetri, sulla quale sono rappresentate due scale, quella della latitudine e quella delle ore. Una rappresentazione schematizzata di questo regolo di Serle è data in Fig. 16.

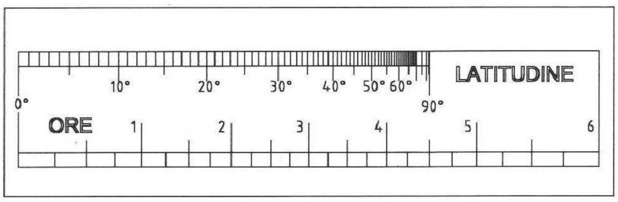

Fig. 16 Il regolo (o scale) di Serle per il disegno dell'orologio solare orizzontale

L'uso del regolo di Serle è semplice e rapido: (ved. Fig. 17) si individuano e tracciano sul piano orizzontale le rette perpendicolari Nord-Sud e Est-Ovest che si incontrano nel centro dell'orologio. Poi:

1. Si pone la scala della latitudine secondo la direzione Ovest-Est, con l'origine nel centro orologio
2. Si trova il punto P sulla retta Ovest-Est dove la scala ha indicata la latitudine del luogo
3. Si pone la scala delle ore con l'ora 6 nel punto P e l'ora 0 nel punto dove viene a toccare la direzione Sud-Nord
4. Si tracciano le rette orarie pomeridiane congiungendo il centro orologio con vari punti orari da 1 a 5 individuati dalla scala
5. Le rette orarie antimeridiane sono simmetriche rispetto alla direzione Nord-Sud, a quelle pomeridiane

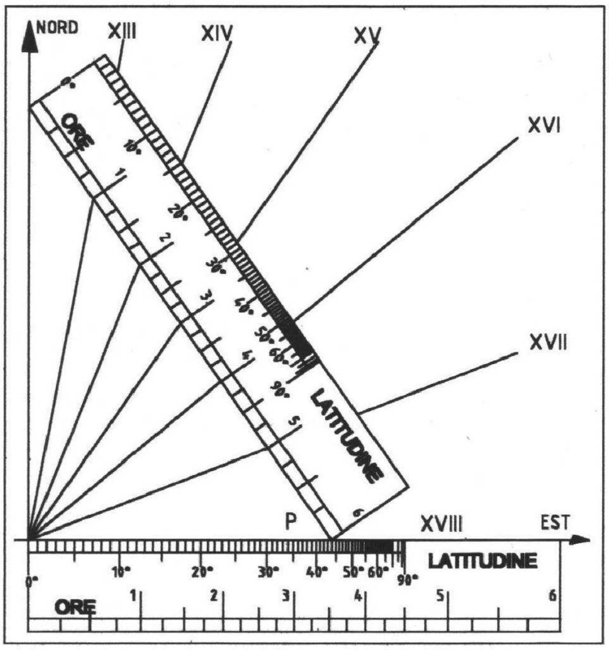

Fig. 17 Le due successive posizioni in cui sistemare il regolo di Serle: esempio con LAT=44°.

In Fig. 18 si vede la genesi delle due scale: l'ipotenusa del triangolo ABC è il modulo di entrambe, ed è pari al diametro costante 2R del cerchio; i cateti corrispondono agli assi cartesiani (B è il centro dell'orologio, AB va verso Nord, BC va verso Est). La prima scala BC dipende solo dalla Latitudine ed è lunga $1/\sqrt{2}$ del modulo., la seconda è l'ipotenusa stessa AC ed è uguale al modulo, essa dipende solo dall'angolo orario H come si vede dai calcoli.

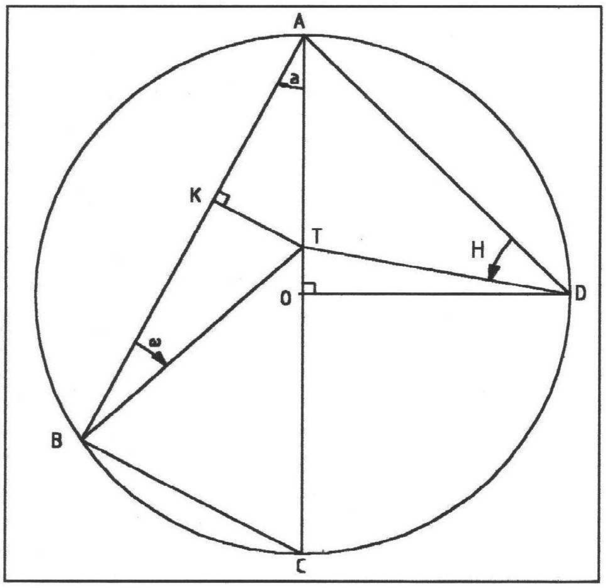

Fig. 18 Scale di Serle: figura per la dimostrazione delle scale

$$OA = OC = OD = R = m/2 \qquad \tan a = \sin LAT$$

Il diametro AC=2R è il modulo delle due scale

$$BC = 2 \cdot R \cdot \sin a = 2 \cdot R \cdot \frac{\tan a}{\sqrt{1+\tan^2 a}} = \frac{m \cdot \sin LAT}{\sqrt{1+\sin^2 LAT}}$$

$$BA = 2 \cdot R \cdot \cos a = \frac{2 \cdot R}{\sqrt{1+\tan^2 a}} = \frac{m}{\sqrt{1+\sin^2 LAT}}$$

$$OT = R \cdot \tan(45° - H) = R \cdot \frac{1-\tan H}{1+\tan H}$$

$$AT = R - OT = 2 \cdot R \cdot \frac{\tan H}{1+\tan H} = m \cdot \frac{\sin H}{\sin H + \cos H}$$

$$KT : BC = AT : AC \qquad KT = \frac{BC}{AC} \cdot AT$$

$$KT = m \cdot \frac{\sin LAT}{\sqrt{1+\sin^2 LAT}} \cdot \frac{\sin H}{\sin H + \cos H}$$

$$AK : AB = AT : AC \qquad AK = \frac{AB}{AC} \cdot AT$$

$$AK = m \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 LAT}} \cdot \frac{\sin H}{\sin H + \cos H}$$

$$KB = AB - AK = \frac{m}{\sqrt{1+\sin^2 LAT}} \cdot \frac{\cos H}{\sin H + \cos H}$$

$$\omega = A\hat{B}T = \arctan\left[\frac{KT}{KB}\right]$$

$$\boxed{\omega = \arctan(\tan H \cdot \sin LAT)}$$

Le scale di Clavio: cinquant'anni prima di D. Foster, Cristoforo Clavio aveva proposto un tipo di regolo con il quale era possibile la costruzione di orologi sia orizzontali che verticali declinanti e non; in modo schematico è rappresentato nella Fig.19.

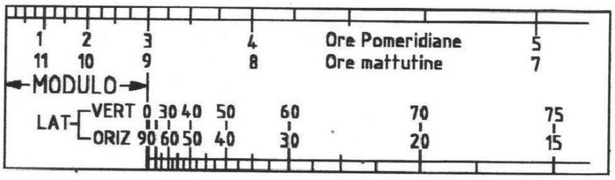

Fig. 19 Schema del regolo di Cristoforo Clavio

In questo regolo, il modulo uguaglia il raggio QI del cerchio equinoziale (Fig. 20 relativa ad un orologio orizzontale)

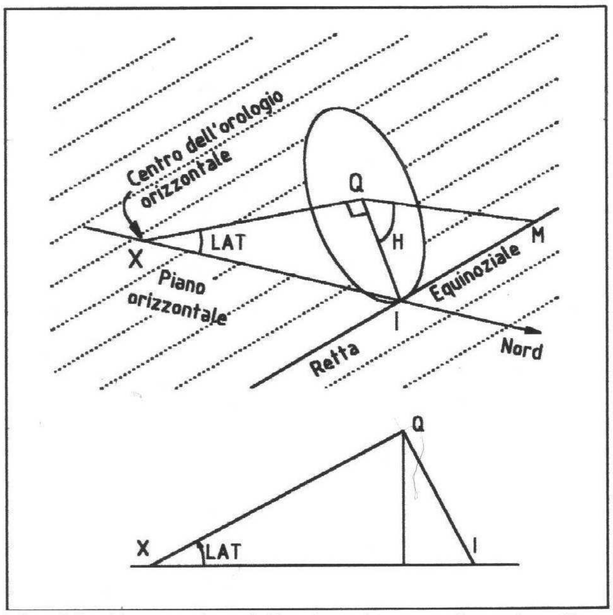

Fig. 20 Prospettiva della situazione e triangolo stilare per l'orologio orizzontale

Le equazioni delle due scale, quella della distanza centro – retta equinoziale e quella dei punti di incontro delle rette orarie sull'equinoziale sono:

1. $QI = m \qquad IX = m/\cos\alpha$

con $\alpha = 90 - LAT$ per gli orizzontali

e $\alpha = LAT$ per i verticali

2. $IM = QI \cdot \tan H = m \cdot \tan H$

da cui, semplicemente, l'angolo ω che le rette orarie fanno con la retta meridana:

$$\tan\omega = \frac{IM}{IX} = m \cdot \tan H \cdot \frac{\sin LAT}{m}$$

$$\boxed{\tan\omega = \tan H \cdot \sin LAT}$$

Per la disegnazione dell'orologio orizzontale con il regolo di Clavio, dopo aver individuato sul piano orizzontale la retta Nord-Sud, si traccia una retta perpendicolare che rappresenta la retta equinoziale. Si appoggia il regolo con la scala delle ore sull'equinoziale e si riportano i punti di incrocio con le rette orarie, sia quelle mattutine verso Ovest, che quelle pomeridiane ad Est. Successivamente si individua il centro dell'orologio ponendo la scala delle latitudini sulla retta meridiana (Nord-Sud) a partire dall'incrocio con l'equinoziale fino al punto, verso Sud, che indica la Latitudine del luogo.

Per l'orologio verticale non declinante il metodo è del tutto analogo, ma la lettura per il centro dell'orologio va fatta sulla scala LAT VERT che mostra valori complementari degli angoli di latitudine.

Fra gli strumenti a scale concepiti più recentemente si hanno **le scale di Winck** (2001) il cui regolo è indicato in Fig.21.

Fig. 21 Possibile realizzazione del regolo di Winck

Queste scale nascono da una generalizzazione di quelle tradizionali attraverso proiezioni parallele; il loro uso è evidenziato nella Fig.22.

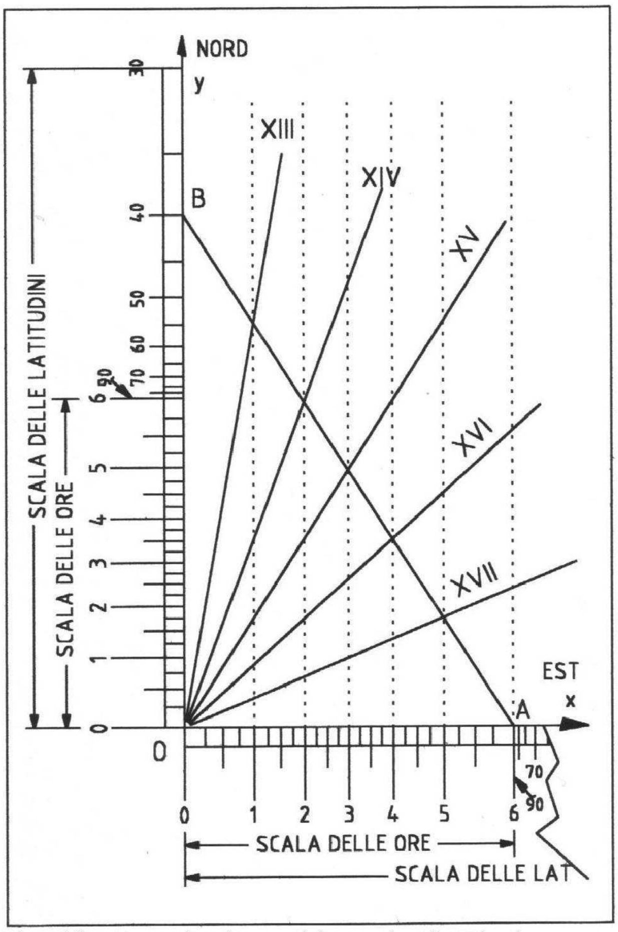

Fig. 22 Esempio d'uso del regolo di Winck per un orologio orizzontale con LAT=40°

Per un orologio orizzontale, nell'esempio con LAT=40°, si individuano la retta meridiana e la retta Est-Ovest che si intersecano in O centro dell'orologio. Si pone prima il regolo sulla Est-Ovest come in Fig.22, e si individua il punto A coincidente con l'ora 6, e gli altri punti relativi alle varie ore. La distanza OA coincide con il modulo m della scala delle ore, che è uguale anche a quello della scala delle latitudini. Successivamente si pone il regolo secondo la direzione Sud-Nord e si individua il punto B relativo alla latitudine del luogo. Si traccia quindi la retta AB che incontra le rette parallele alla retta meridiana e relative alle varie ore individuate con la scala delle ore. Le rette orarie si trovano congiungendo questi punti di incontro con il centro O dell'orologio. La parte relativa al quadrante delle ore mattutine è il simmetrico rispetto alla retta Nord-Sud di quello trovato.

Le due scale usate sul regolo di Winck sono: quella delle ore, con modulo m uguale alla distanza OA; questa scala è uguale all'equivalente di Serle:

$$x = m \cdot \frac{\sin H}{\sin H + \cos H} \qquad \text{con H=Angolo Orario}$$

La seconda scala é quella della latitudine con equazione:

$$y = \frac{m}{\sin LAT}$$

Le coordinate dei punti A e B sono $A \equiv (m\,,0)$ $B \equiv (0\,, m/\sin LAT)$ e l'equazione segmentaria della retta AB è:

$$\frac{x}{m} + \frac{y \cdot \sin LAT}{m} = 1$$

da cui si ricava $y = \dfrac{-x+m}{\sin LAT}$

Per il generico valore dell'ascissa $x = m \cdot \dfrac{\sin H}{\sin H + \cos H}$

si ha l'ordinata:

$$y = -m \cdot \frac{\sin H}{\sin H + \cos H} \cdot \frac{1}{\sin LAT} + \frac{m}{\sin LAT}$$

$$\vdots \quad \Rightarrow \quad m \cdot \frac{\cos H}{\sin LAT} \cdot \frac{1}{\sin H + \cos H}$$

Il rapporto tra questa ascissa ed ordinata dà la tangente del generico angolo ω fra retta oraria e retta meridiana:

$$\tan \omega = \frac{x}{y} = m \cdot \frac{\sin H}{\sin H + \cos H} \cdot \frac{\sin H + \cos H}{\cos H} \cdot \frac{\sin LAT}{m}$$

$$\boxed{\tan \omega = \tan H \cdot \sin LAT}$$

Niente di nuovo, ci pare, ai fini delle scale, negli strumenti di Middleton e di Lombardero che rimangono quelle di Serle e di Foster.

Anche il caso degli **orologi verticali declinanti** non utilizza ulteriori scale ma tipicamente viene risolto secondo i seguenti passi successivi:

- Calcolo grafico o analitico delle grandezze
  - ε elevazione dello stilo
  - σ angolo substilare - retta meridiana
  - $P\sigma$ angolo orario della substilare
- Disegno della verticale per il centro dell'orologio verticale
- Disegno della substilare e della sua perpendicolare per il centro orologio
- Disegno di un orologio orizzontale di latitudine pari ad ε da costruirsi con la scala delle Latitudini posta successivamente sulle due semirette perpendicolari alla substilare
- Tracciatura delle rette orarie con la scala delle ore, tenendo conto dell'ora substilare e del mezzogiorno che è la retta verticale

Nella fig.23 è dato un esempio di un orologio verticale per una LAT=44° con DECL=20° Est. Per questo si hanno i valori di:

$$\varepsilon = 42.5°$$
$$\sigma = 19.5°$$
$$P\sigma = 27.6° \quad \Rightarrow \quad 1.8435\ ore$$

Lo stilo polare origina dal centro dell'orologio, sta nel piano perpendicolare al quadro e che contiene la substilare, ed ha elevazione sul piano del quadro uguale ad ε.

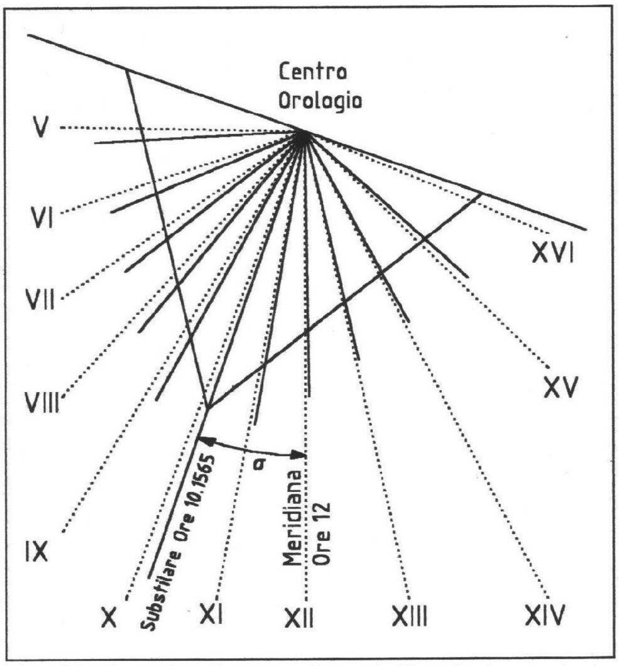

Fig. 23 Esempio di costruzione dell'orologio verticale (LAT=44°, DECL=20° Est) con l'uso del regolo

Alcuni dei più recenti lavori di F.Sawyer e di R.J.Winck nel trattare della risoluzione dell'orologio verticale declinante utilizzano le sole scale tradizionali per ricavare i parametri ε, σ e $P\sigma$, l'uno, e, l'altro, un procedimento che ottiene le rette orarie con la sola scala oraria più una semplice scala dei coseni, di ugual modulo, unite al cerchio di Foster (oppure, in alternativa, alcuni semplici calcoli più la scala oraria).

Conclusioni. Si è visto come, in modo semplice e rapido, si possa progettare e disegnare un orologio solare piano con l'aiuto di strumenti meccanici che in effetti risolvono le relative formule di calcolo; questi strumenti, come dice il Cousins, sono stati in passato utilizzati a lungo per la costruzione degli orologi solari, anche se forse non a tutti sono state ben chiare le loro modalità di funzionamento. Questi strumenti, rigorosi perché sostanzialmente risolvono di volta in volta la formula matematica interessata, mantengono tuttora invariata la loro validità, ma, con la rivoluzione del computer, hanno perduto molto del loro "appeal", sono diventati obsoleti, e rivivono soltanto nella curiosità degli appassionati e degli storici.

Bibliografia generale

1. M. D'Ocagne *Traitè de nomographie* Gauthier - Villars Paris 1899
2. Enciclopedia Italiana Treccani voce *nomografia*
3. T. Zeuli *Introduzione ai calcoli numerici e grafici* Ed. Gheroni Torino
4. S. Chirita M. Ciarletta *Calcolo vol. 1* Zanichelli Bologna 2002
5. L. Tonelli *Lezioni di analisi matematica* Litografia Tacchi Pisa 1944
6. G. Fantoni *Orologi solari. Trattato completo di Gnomonica* Technimedia Roma 1988
7. P.G. Lovotti *Gnomonica analitica in 3D: l'orologio solare verticale* in Atti del IX Seminario Nazionale di Gnomonica S. Felice del Benaco 1999
8. P.G. Lovotti *Gnomonica analitica in 3D: l'orologio solare orizzontale* Gnomonica N°5 Gennaio 2000
9. R. J. Vinck P. Sauvageot *Le cercle de Samuell Foster* Cadran Info N° 8 Octobre 2003
10. F. Sawyer *Serle's Dialing Scales* Compendium Vol. 2 N°2 June 1995
11. F. Sawyer *A Vertical Decliner By Dialing Scales and Schema* Compendium Vol. 5 N°1 March 1998
12. F. Sawyer *Vertical Decliners by A New, Easy and Most Speedy Way* Compendium Vol. 10 N°1 March 2003
13. G. Serle *Dialling Universal* NASS Reprint
14. A. Gunella *The Dialing Scales of Clavius* Compendium Vol. 10 N°1 March 2003
15. A. Gunella *Quale iter geometrico ha originato il cosiddetto righello di Middleton?* Gnomonica N°9 Maggio 2001
16. A. Gunella *Il ponte degli asini del Clavius (1586)* Gnomonica Italiana N°1 Gennaio 2002
17. E. C. Middleton *The use of Dialling Scales (1913)* NASS facsimile reprint
18. M. Lombardero *Semicirculo graduado para el trazado istantaneo de un reloj de sol horizontal* Analema N°1 Enero - Abril 1991
19. R. J. Vinck *Dialing Scales by Parallel Projection* Compendium Vol. 8 N°4 December 2001
20. R. J. Vinck *Vertical Declining Sundials by Dialing Scales* Compendium Vol. 10 N°1 March 2003