

LA MERIDIANA DI CASSINI NELL' ANNO CASSINIANO : RILIEVI SOLARI ODIERNI, ERRORI SISTEMATICI E VERIFICHE STRUTTURALI

ALBERTO NICELLI, ALESSANDRO GUNELLA,
GIOVANNI PALTRINIERI

A 350 anni dalla costruzione della meridiana di Cassini, nella basilica di S. Petronio a Bologna, l'anno 2005 è stato intitolato "Anno Cassiniano". Ma in che stato è questa storica meridiana, che ha confermato sperimentalmente la teoria di Keplero contro quella di Tolomeo? L'analisi degli errori sistematici sugli angoli zenitali del Sole, effettuata su rilievi recenti da Nicelli, evidenzia uno spostamento del foro gnomonico e uno sprofondamento generale della linea meridiana, confermati dalle misure di Gunella e Paltrinieri con strumentazioni professionali di precisione.

Introduzione

Il 21 Giugno 1655, nel giorno del solstizio d'estate, Cassini eseguì ufficialmente la prima misura necessaria alla realizzazione della linea meridiana, alla presenza dei notabili dell'Università e di tutta la cittadinanza invitata ad assistere all'importante evento, che costituiva, come si annunciava testualmente nel volantino stampato per l'occasione, "la prima pietra" di una Scienza, l'Astronomia, che andava "restaurata dalle fondamenta" [2]¹

L'iniziativa di intitolare il 2005 "Anno Cassiniano", promossa dall'Università degli Studi e dall'Osservatorio Astronomico di Bologna, è nata dalla ricorrenza dei 350 anni dalla costruzione della meridiana di Cassini, in concomitanza con l'arrivo della sonda spaziale "Cassini-Huygens" sul satellite di Saturno² Titano. Nel 2005 ricorrono inoltre i 30 anni dalla costruzione del telescopio "G.D. Cassini" di Loiano.

Molte sono le celebrazioni commemorative in onore del grande astronomo previste in questo Anno Cassiniano: conferenze, mostre, concerti, visite guidate in San Petronio... Ma in che stato si trova la sua storica meridiana, con la quale restaurò davvero le fondamenta dell'Astronomia, confermando sperimentalmente la teoria di Keplero contro quella di Tolomeo ?

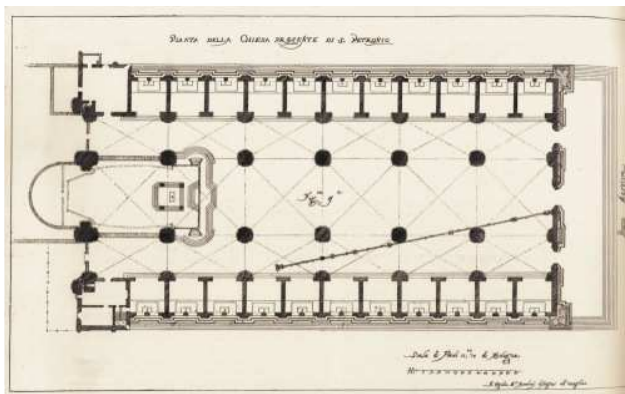


Fig. 1 Pianta della basilica di S. Petronio, con la meridiana di Cassini.

Le ultime verifiche furono eseguite nel 1904 e nel 1925 da Federigo Guarducci, Professore di Geodesia all'Università di Bologna. La verifica del 1904 avvenne in seguito alla sua nomina di Membro Onorario dell'Accademia delle Scienze. Dovendo per tale occasione redigere una Memoria da presentare all'Accademia, egli scelse come oggetto di studio lo stato di conservazione della meridiana in San Petronio. Per la sua ricerca il Guarducci fece uso delle tecniche proprie della Geodesia, effettuando opportune triangolazioni col teodolite. La Memoria venne letta nella sessione del 28 Maggio 1905 e si intitolava: "La Meridiana del Tempio di S. Petronio di Bologna riveduta nel 1904". Dalla sua relazione risultò che:

- l'Altezza Gnomonica corrispondeva ancora a quella originale: il foro risultò essere ad una altezza di metri 27,0699;
- il centro del foro non aveva subito sensibili spostamenti rispetto al Punto Verticale³;
- la linea meridiana fu trovata lievemente deviante di 1' 36,6" verso Est, con un conseguente ritardo nell'indicazione del mezzodì di 2,5 secondi al solstizio estivo e di 6,5 secondi a quello invernale;
- il livello della linea diede risultati soddisfacenti, considerando l'età dello strumento: assumendo come quota base il Punto Verticale, gli abbassamenti più rilevanti si riscontrarono sulla piastra equinoziale (-8 millimetri) e su quella del solstizio invernale (-7 millimetri).

Queste e molte altre misure portarono alla conclusione che lo stato generale della meridiana si era mantenuto pressoché inalterato dal suo completo rifacimento effettuato nel lontano 1776 da Eustachio Zanotti⁴.

Nel 1925, in occasione del terzo centenario della nascita di Gian Domenico Cassini, il Prof. Guarducci fece una seconda approfondita verifica sullo stato della meridiana,

¹ I numeri fra parentesi quadre indicano i riferimenti in **Bibliografia**.

² La missione prende il nome di Cassini quale scopritore di alcuni satelliti di Saturno e della celebre divisione dei suoi anelli.

³ Il Punto Verticale è l'ideale proiezione perpendicolare al suolo del centro nominale del foro gnomonico, e rappresenta l'inizio della linea meridiana, detto anche Vertice.

⁴ Della meridiana originale di Cassini oggi rimangono solo i marmi incisi con le ellissi delle proiezioni solari ai solstizi.

in seguito alla quale risultarono pienamente confermate le misure di vent'anni prima. Per l'occasione fu pubblicata una nuova e più completa edizione della sua Memoria, patrocinata dal Comune di Bologna, dalla Provincia di Bologna e dalla Fabbriceria di San Petronio [3].

Gli errori sistematici nei rilievi odierni

I risultati ottenuti dal Prof. Guarducci costituiscono un sicuro riferimento sull'ottimo stato della meridiana agli inizi del Novecento, ma a distanza di un secolo tutta la struttura della meridiana di Cassini sembra aver subito un grave degrado; infatti, dai rilievi solari effettuati sulla meridiana dagli gnomonisti Sergio Giordani e Giovanni Paltrinieri nel periodo fra il 2001 e il 2003⁵ si ricavano delle distanze zenitali del Sole sistematicamente maggiori di quelle teoriche⁶, con discrepanze comprese fra 100 e 200 secondi d'arco, ovvero **dieci volte** più grandi degli errori medi ricavabili dalle misure effettuate ai tempi di Cassini (Fig.2). Questo significa che le tangenti misurate lungo la linea meridiana risultano sempre maggiori del giusto, il che può essere spiegato solo da un dissesto strutturale, ovvero da uno spostamento del foro gnomonico rispetto alla sua posizione nominale e/o da una variazione del livello della linea meridiana.

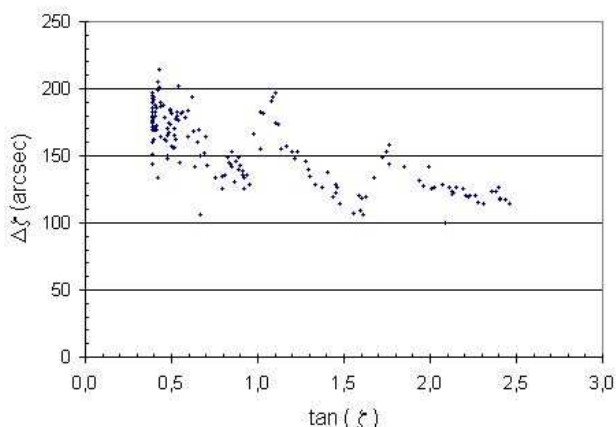


Fig. 2 Errori sugli angoli zenitali (misure 2001-2003).

Dall'attenta osservazione della Fig. 2 risulta evidente, all'aumentare della tangente dell'angolo zenitale ζ , un brusco aumento degli errori $\Delta\zeta$ in corrispondenza dei valori 1,1 e 1,8, cioè proprio dove si trovano le due celebri colonne tra le quali Cassini riuscì a progettare il passaggio della linea meridiana (Fig. 1): è quindi già possibile aspettarsi che il peso delle volte gravante in quei punti abbia causato un accentuato abbassamento della pavimentazione.

In generale il sistematico errore in eccesso sulle tangenti misurate può essere dovuto alle seguenti cause:

- un aumento dell'altezza gnomonica rispetto a quella nominale;
- uno spostamento del foro verso Nord;
- un abbassamento della linea meridiana rispetto al suo livello originale.

Ognuna di queste variazioni strutturali, infatti, singolarmente considerata o concomitante con le altre, provoca un aumento della distanza della proiezione luminosa dal Vertice della linea meridiana e quindi un aumento delle tangenti misurate, con un conseguente aumento apparente degli angoli zenitali. Ma non si può escludere la concomitanza con le variazioni opposte (per esempio gli effetti di un abbassamento della linea meridiana possono essere in parte mitigati da un abbassamento del foro gnomonico e/o da un suo spostamento verso Sud).

Per individuare le variazioni strutturali responsabili degli errori sistematici, e per valutarne l'entità, è stato fatto uno studio statistico sull'insieme delle misure.

Analisi degli errori sistematici

La variazione assoluta dell'altezza gnomonica non può essere determinata senza effettuare una misura diretta dell'altezza del foro, infatti gli errori sugli angoli zenitali dipendono dalla variazione relativa del livello della linea rispetto al foro; indichiamo perciò con Z l'altezza gnomonica nominale (27,07 metri) e con ΔZ la variazione efficace dell'altezza gnomonica in un dato punto della linea meridiana, ovvero la differenza fra la variazione di altezza del foro e la variazione di livello di quel punto della meridiana rispetto al Punto Verticale. Indichiamo inoltre con ΔX lo spostamento del foro nella direzione della linea meridiana, positivo verso Nord, negativo verso Sud. Non prendiamo in considerazione un possibile spostamento del foro in direzione ortogonale alla linea meridiana, perché non avrebbe effetti sensibili sulle misure delle tangenti dei lembi solari. Per lo stesso motivo possiamo trascurare la deviazione della linea rispetto al meridiano (Fig. 3).

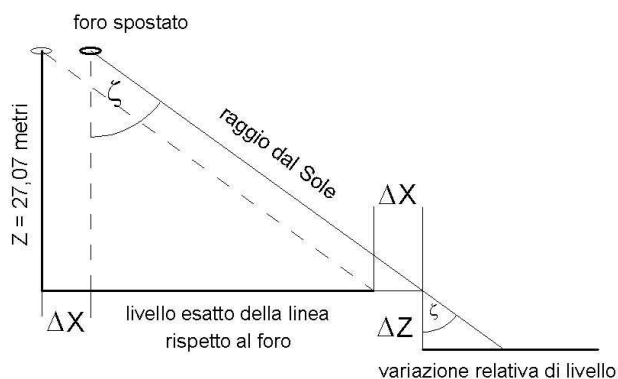


Fig. 3 Variazioni strutturali e misura delle tangenti.

Siano ζ_{SUP} e ζ_{INF} gli angoli zenitali del lembo superiore e del lembo inferiore del Sole, ricavati dai rilievi delle tangenti sulla linea meridiana e depurati da rifrazione e parallassi. Sia inoltre ζ_M l'angolo zenitale del centro del Sole, dedotto dai suoi lembi:

⁵ Sono in tutto 165 misure di tangenti relative ai lembi della proiezione solare.

⁶ Per il confronto è stato utilizzato il noto programma per computer GEFEM, scritto dall'Ing. Gianni Ferrari.

$$\zeta_M = \frac{\zeta_{INF} + \zeta_{SUP}}{2}$$

Indicando con ζ_T l'angolo zenitale teorico del Sole; con d il suo diametro angolare; con $\zeta_T + d/2$ e $\zeta_T - d/2$ i veri angoli zenitali del lembo inferiore e del lembo superiore; con ΔZ_{INF} e ΔZ_{SUP} i valori di ΔZ in corrispondenza della proiezione dei lembi sulla meridiana; deve essere:

$$\zeta_{INF} = \arctan \left[\frac{(Z + \Delta Z_{INF}) \tan(\zeta_T + d/2) + \Delta X}{Z} \right]$$

$$\zeta_{SUP} = \arctan \left[\frac{(Z + \Delta Z_{SUP}) \tan(\zeta_T - d/2) + \Delta X}{Z} \right]$$

Siccome è lecito considerare molto piccola l'eventuale variazione di ΔZ nel tratto di linea compresa fra i due lembi dell'immagine solare, possiamo porre:

$$\Delta Z_{INF} \approx \Delta Z_{SUP} = \Delta Z$$

e quindi, data la piccolezza di $d/2$ rispetto a ζ_T , in prima approssimazione:

$$\zeta_M = \arctan \left[\frac{(Z + \Delta Z) \tan(\zeta_T) + \Delta X}{Z} \right]$$

Ne consegue che l'errore sull'angolo zenitale è:

$$\Delta \zeta = \zeta_M - \zeta_T = \arctan \left[\frac{(Z + \Delta Z) \tan(\zeta_T) + \Delta X}{Z} \right] - \zeta_T$$

Sfruttando l'identità trigonometrica:

$$\tan(\zeta_M - \zeta_T) = \frac{\tan(\zeta_M) - \tan(\zeta_T)}{1 + \tan(\zeta_M) \tan(\zeta_T)}$$

si ottiene:

$$\tan(\Delta \zeta) = \frac{\frac{(Z + \Delta Z) \tan(\zeta_T) + \Delta X}{Z} - \tan(\zeta_T)}{1 + \frac{(Z + \Delta Z) \tan(\zeta_T) + \Delta X}{Z} \tan(\zeta_T)}$$

e dopo semplici passaggi algebrici, approssimando $\tan(\Delta \zeta)$ con $\Delta \zeta$ e trascurando i termini che contengono i prodotti fra ΔZ , ΔX e $\Delta \zeta$, si arriva all'equazione:

$$Z[1 + \tan^2(\zeta_T)]\Delta \zeta = \Delta Z \tan(\zeta_T) + \Delta X \quad (1)$$

Considerando come stima preliminare un ΔZ medio costante, la (1) può essere considerata un'equazione lineare nella forma $y = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$, cioè una retta con coefficiente angolare $\mathbf{a} = \Delta Z$ e intercetta $\mathbf{b} = \Delta X$, in cui i valori dell'ordinata $y = Z[1 + \tan^2(\zeta_T)]\Delta \zeta$ si ricavano dai dati e

sono funzione dell'ascissa $x = \tan(\zeta_T)$. I punti del grafico, infatti, mostrano un'evidente tendenza a disporsi secondo una retta con coefficiente angolare e intercetta non nulli (Fig.4), e questa correlazione conferma l'esistenza delle ipotizzate variazioni strutturali.

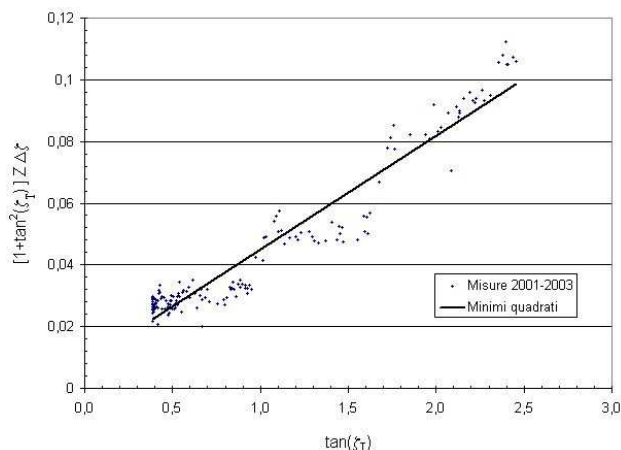


Fig. 4 Regressione lineare con i minimi quadrati.

I parametri ΔZ e ΔX più probabili possono essere stimati statisticamente col metodo dei minimi quadrati, tramite una regressione lineare [7][8], che fornisce:

$$\Delta Z = 3,7 \text{ +/- } 0,2 \text{ cm}$$

$$\Delta X = 0,8 \text{ +/- } 0,3 \text{ cm}$$

(gli intervalli di confidenza sono stati considerati pari a tre volte la deviazione standard, e quindi con una probabilità che supera il 99%). Questi valori indicano **un sensibile spostamento del foro verso Nord e una notevole variazione efficace dell'altezza gnomonica**, imputabile più probabilmente ad uno sprofondamento della pavimentazione e quindi del livello della linea meridiana, piuttosto che ad un consistente innalzamento del foro gnomonico.

La bontà della stima con la regressione lineare è indicata da un *coefficiente di determinazione* abbastanza vicino all'unità ($r^2 = 0,929$), tuttavia l'assunzione di un ΔZ medio costante potrebbe essere troppo semplificatoria, infatti dal grafico si può notare che i punti delle misure corrispondenti a valori di $\tan(\zeta_T) > 2,0$ si dispongono al di sopra della retta di regressione, con un'inclinazione che sembra leggermente maggiore (cioè ΔZ maggiore), mentre quelli corrispondenti a valori inferiori sono caratterizzati da un'inclinazione evidentemente minore (ΔZ minore). Sembra quindi che i dati si possano rappresentare più accuratamente con una generale **pendenza della linea meridiana in discesa dal Vertice verso Nord**. Per semplicità possiamo schematizzare un aumento lineare di ΔZ in funzione della distanza dal Vertice, nella forma:

$$\Delta Z = \mathbf{m} Z \tan(\zeta_T) + \Delta Z_0 \quad (2)$$

dove m è il coefficiente angolare (positivo se la meridiana è in discesa verso Nord, negativo se è in salita), approssimabile con l'angolo $\Delta\gamma$ che la linea forma rispetto al livello orizzontale. Sostituendo dunque l'espressione lineare (2) al posto di ΔZ nell'equazione (1) si ottiene l'equazione:

$$Z[1 + \tan^2(\zeta_T)]\Delta\zeta = Z\Delta\gamma \tan^2(\zeta_T) + \Delta Z_0 \tan(\zeta_T) + \Delta X$$

ovvero una parabola nella forma $y = ax^2 + bx + c$, i cui coefficienti si possono stimare con una regressione polinomiale quadratica (Fig.5), che effettivamente sembra adattarsi meglio a tutto l'insieme dei dati ($r^2 = 0,962$).

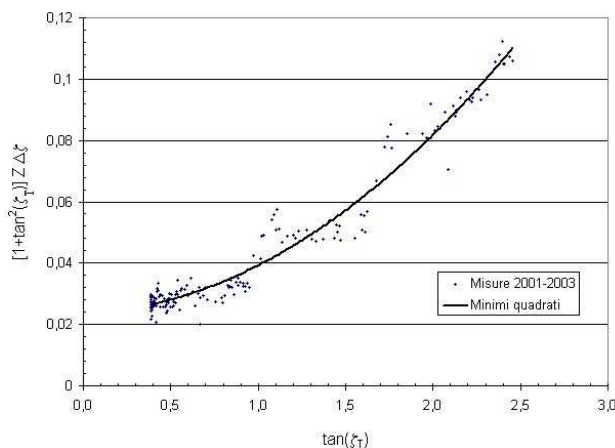


Fig. 5 Regressione polinomiale quadratica.

I coefficienti risultanti dalla regressione sono:

$$Z\Delta\gamma = 0,0135 \pm 0,0034 \text{ m}$$

$$\Delta Z_0 = 0,0022 \pm 0,0089 \text{ m}$$

$$\Delta X = 0,0236 \pm 0,0044 \text{ m}$$

da cui si deduce, applicando l'equazione (2):

- un abbassamento dell'estremo solstiziale estivo della linea meridiana, rispetto al livello del foro gnomonico, di circa:
 $0,0135 \times 0,380 + 0,0022 \text{ m} = 0,7 \pm 0,9 \text{ cm}$
- un abbassamento dell'estremo solstiziale invernale rispetto al livello del foro gnomonico, di circa:
 $0,0135 \times 2,50 + 0,0022 \text{ m} = 3,6 \pm 1,2 \text{ cm}$
- uno spostamento del foro gnomonico verso Nord:
 $\Delta X = 2,4 \pm 0,4 \text{ cm}$

Nel loro complesso i risultati delle analisi statistiche sembrano quindi evidenziare **uno sprofondamento generale della linea meridiana, in aumento fino a 3-4 centimetri verso l'estremità del solstizio invernale**, in concomitanza con **uno spostamento sensibile del foro, di 1-2 centimetri verso Nord**.

La verifica dell'Altezza Gnomonica

Il giorno 8 Gennaio 2005 sono convenuti nella basilica di San Petronio a Bologna Alessandro Gunella, Alberto Nicelli, Rodolfo Calanca, vice-Direttore di "Coelum", e Giovanni Paltrinieri. Era presente anche lo gnomonista Sergio Giordani, autore di gran parte dei rilievi effettuati sulla linea meridiana fra il 2001 e il 2003, che hanno permesso la suesposta analisi degli errori sistematici.

Fra la curiosità degli occasionali osservatori presenti nella basilica, Gunella ha piazzato in corrispondenza del Vertice della linea meridiana lo strumento per la misura dell'altezza del foro gnomonico: per tale scopo ha usato un distanziometro elettronico *Leica Distoclassic*. Con la collaborazione di Paltrinieri, salito sul tetto in corrispondenza del foro, per renderlo più visibile allo strumento mediante l'apposizione di un foglio bianco, la misura di Gunella è risultata uguale a 27,068 metri. L'altezza del foro era da considerarsi quindi invariata (nei limiti dell'incertezza strumentale, dell'ordine di 1-2 mm), rispetto a quella nominale di 27,0699 metri. Le misure sono state ripetute sei volte, ottenendo sempre lo stesso valore, e sono state effettuate in condizioni ideali, con temperatura costante di circa 15° e ambiente semibuio.

La verifica del Punto Verticale

Successivamente Paltrinieri ha calato attraverso il foro gnomonico un filo a piombo, fin quasi a toccare il Vertice della meridiana; dopodiché ha tenuto il filo tangente alla circonferenza del foro in quattro distinte posizioni: per ognuna di queste posizioni, dopo aver atteso che le oscillazioni del pendolo si smorzassero, Gunella segnava le estremità e il punto medio delle piccole oscillazioni residue su un foglio di carta, fissato con del nastro adesivo in corrispondenza del Vertice della meridiana. Facendo passare una circonferenza per i quattro punti medi si è quindi ottenuta la proiezione ortogonale del foro gnomonico sul pavimento della basilica (Fig. 6), il cui centro risultava spostato dal vero Punto Verticale di **1,8 cm verso Nord**, e **0,7 cm verso Est**.

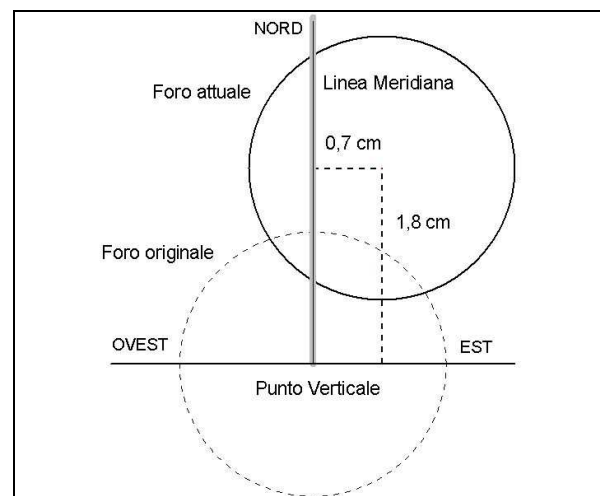


Fig. 6 La proiezione ortogonale del foro gnomonico sul pavimento della basilica.

L'incertezza su queste misure poteva essere dell'ordine di 1-2 millimetri. L'entità dello spostamento del foro verso Nord risultava in buon accordo con le analisi statistiche.

Lo sprofondamento della linea meridiana

Dopo aver misurato l'altezza del foro e il suo spostamento verso Nord diventava possibile prevedere in maggior dettaglio lo sprofondamento della linea meridiana. Infatti, dall'equazione (1) si può ricavare:

$$\Delta Z = \frac{Z[1 + \tan^2(\zeta_T)]\Delta\zeta - \Delta X}{\tan(\zeta_T)}$$

il cui grafico, cambiato di segno, con i valori $\Delta X = 0,018$ metri e $Z = 27,07$ metri, mostra la "radiografia" dell'abbassamento assoluto della linea rispetto al suo livello originale in funzione della distanza dal Vertice, espressa in Moduli⁷ (Fig.7): appare evidentissima la ipotizzata pendenza della linea, con uno sprofondamento maggiore verso l'estremità del solstizio invernale, in accordo con le previsioni teoriche (la pendenza è ovviamente amplificata dalle diverse unità di misura sugli assi). Nonostante la dispersione statistica dei punti⁸, dovuta alle incertezze di misura sulla meridiana, e assumendo che non vi siano stati altri errori sistematici durante i rilievi, si può stimare "ad occhio" un abbassamento di circa 1,5-2 cm nel primo tratto della linea a partire dal solstizio estivo; quindi uno sprofondamento fino a 3,5 cm in corrispondenza della prima colonna; segue una breve risalita fino a 2,5-2 cm, e poi il massimo sprofondamento di 3,5-4 cm dalla seconda colonna fino al solstizio invernale.

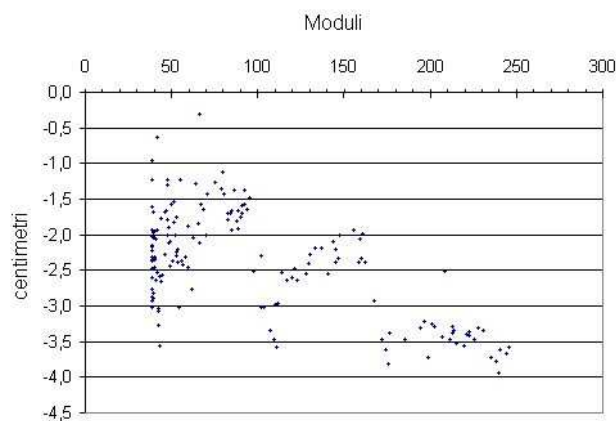


Fig. 7 Sprofondamento della meridiana dedotto dagli errori sistematici sugli angoli zenitali.

⁷ L'Altezza Gnomonica, di metri 27,0699, è considerata composta di 100 Moduli. Un Modulo è dunque 270,699 mm. Dal Punto Verticale inizia la numerazione dei marmi a lato della meridiana, che parte dal Modulo 0 e arriva fino al Modulo 250.

⁸ La dispersione statistica appare molto maggiore in corrispondenza di angoli zenitali piccoli, infatti gli errori di misura delle tangenti sulla linea meridiana causano un errore sugli angoli zenitali all'incirca sei volte più grande al solstizio estivo rispetto al solstizio invernale.

La verifica del livello della linea meridiana

Il 5 Febbraio 2005 l'Ing. Lorenzo Reggiani, il Geom. Paola Ferri e Giovanni Paltrinieri hanno effettuato delle misure di quota della linea meridiana, utilizzando un Livello Zeiss Jena NI-002⁹. Una seconda sessione di ulteriori misure e verifiche è stata effettuata il 12 Marzo 2005. I risultati sono quelli riportati in tabella (Tab. 1). Sono riportate anche le cinque misure di quota che il Prof. Guarducci pubblicò nella sua Memoria, per confrontarle con quelle corrispondenti ai rilievi del 2005.

Posizione sulla linea meridiana	Distanza in Moduli	Quota 1905 (mm)	Quota 2005 (mm)
0	0,00	0	0
14	14,00	- 5,6
28	28,00	- 9,4
1 (Lembo Cancro)	37,83	- 12,5
1,5 (Centro Cancro)	38,43	- 12,8
2 (Lembo Cancro)	38,98	- 4	- 13,1
42	42,00	- 14,0
3 (Bordo Leone-Gemelli)	43,89	- 14,6
3,5 (Centro Leone-Gemelli)	45,02	- 14,1
4 (Bordo Leone-Gemelli)	46,38	- 12,3
50	50,00	- 14,6
56	56,00	- 16,2
5 (Bordo Vergine-Toro)	63,70	- 15,2
5,5 (Centro Vergine-Toro)	64,97	- 15,0
6 (Bordo Vergine-Toro)	66,18	- 15,7
76	76,00	- 16,8
88	88,00	- 20,9
7 (Bordo Bilancia-Ariete)	97,09	- 24,0
7,5 (Centro Bilancia-Ariete)	98,27	- 25,0
8 (Bordo Bilancia-Ariete)	99,58	- 8	- 25,2
104	104,00	- 31,2
108 (Colonna)	108,00	- 35,3
114	114,00	- 33,2
124	124,00	- 28,9
128	128,00	- 26,7
132	132,00	- 25,3
142	142,00	- 27,6
9 (Bordo Scorpione-Pesci)	146,96	- 24,9
9,5 (Centro Scorpione-Pesci)	148,22	- 24,5
10 (Bordo Scorpione-Pesci)	149,44	- 1	- 24,2
156	156,00	- 23,8
164	164,00	- 27,4
174	174,00	- 39,7
180 (Colonna)	180,00	- 44,2
184	184,00	- 42,5
190	190,00	- 38,9
196	196,00	- 37,5
202	202,00	- 35,5
11 (Bordo Sagittario-Acquario)	209,88	- 33,7
11,5 (Centro Sagittario-Acquario)	211,12	- 4	- 32,6
12 (Bordo Sagittario-Acquario)	212,36	- 33,0
222	222,00	- 39,0
228	228,00	- 41,5
234	234,00	- 41,1
13 (Lembo Capricorno)	243,40	- 42,3
13,5 (Centro Capricorno)	246,80	- 41,0
14 (Lembo Capricorno)	250,15	- 7	- 41,6

Tab. 1 Misure di quota sulla linea meridiana.

⁹ Alcune misure preliminari sono state effettuate dal Sig. Pietro Ballanti nel mese di Gennaio, prima con un laser e poi con un teodolite, ma l'affidabilità di quelle con il Livello Zeiss è decisamente superiore.

Per leggere la tabella si tenga presente che:

- la Posizione 0 corrisponde al Punto Verticale, ovvero la quota-base di riferimento;
- le Posizioni relative ai Segni Zodiacali sono indicate con la numerazione progressiva adottata dal Guarducci: in particolare le Posizioni 1-2 e 13-14 in Cancro e Capricorno si riferiscono ai Lembi dell'immagine del Sole ai solstizi tracciata da Cassini;
- il Bordo dei Segni Zodiacali è il lato di ciascun marmo; il Centro è il punto intermedio dei Lembi o dei Bordi considerati¹⁰;
- le altre Posizioni sono indicate dal numero dei corrispondenti Moduli.

Conclusioni

Le misure effettuate risultano in buon accordo con le previsioni teoriche e purtroppo confermano l'entità dello sprofondamento della meridiana e dello spostamento del foro gnomonico rispetto alla loro posizione originale (Fig. 8). Un'opera di restauro sarebbe profondamente auspicabile, nonostante sia un'impresa certamente non facile; oltre alle giuste celebrazioni previste in questo Anno Cassiniano, infatti, il più grande onore che noi posteri possiamo fare a Cassini è il massimo impegno per la conservazione "funzionale", e non solo "estetica", della sua meridiana, perché essa non è solo un monumento all'ingegno umano di inestimabile valore storico e scientifico, ma costituisce ancora oggi, per noi e per le future generazioni, uno strumento formidabile, di inesauribili potenzialità didattiche, per verificare sperimentalmente e in piena autonomia le basi fondamentali dell'Astronomia apprese sui libri.

Nel frattempo l'osservatore che volesse trarre valide indicazioni dai rilievi odierni sulla meridiana non può far altro che apportarvi le appropriate correzioni, come viene proposto nella seguente Appendice.

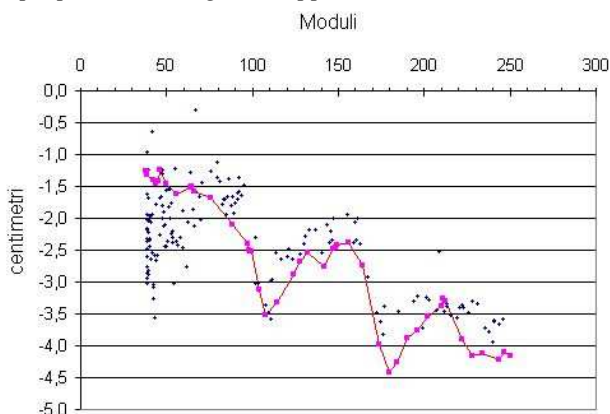


Fig. 8 Grafico delle quote misurate, sovrapposto a quello dedotto dagli errori sistematici.

¹⁰ Tali Centri, fatta eccezione per la Posizione "11,5", non sono indicati nella Memoria del Guarducci, ma li prese anch'egli in considerazione per la mira col teodolite, inserendo in quelle posizioni una punta d'acciaio, di cui resta ancora oggi un forellino di un paio di millimetri di diametro.

Appendice - Le correzioni ai rilievi odierni

A) Come correggere gli angoli zenitali

Dall'equazione (1) ricaviamo $\Delta\zeta$, e approssimando $\tan(\zeta_T)$ con $\tan(\zeta_M)$ otteniamo:

$$\Delta\zeta \approx \frac{\Delta Z \tan(\zeta_M) + \Delta X}{Z[1 + \tan^2(\zeta_M)]}$$

Questa è la quantità da sottrarre all'angolo zenitale ζ_M del Sole, ricavato dalle tangenti dei lembi rilevate sulla meridiana. I valori dei parametri sono $\Delta X = 0,018$ metri, $Z = 27,07$ metri, e ΔZ uguale al valor medio fra ΔZ_{INF} e ΔZ_{SUP} (dai quali si discosta comunque poco), che si possono stimare per interpolazione lineare fra le misure di quota riportate in tabella.

Per esempio, il 12 Marzo 2003 è stato misurato un angolo zenitale di $47^\circ 55' 48''$, mentre quello teorico risulta essere $47^\circ 52' 31''$, con un errore in eccesso, quindi, di ben $197''$. Siccome le distanze dei lembi dell'immagine solare dal Vertice, misurate in Moduli, furono 111,800 e 109,660 (non corrette dalla penombra dovuta al foro), dalla tabella possiamo ricavare per interpolazione il valore $\Delta Z_{INF} = 0,0340$ metri, $\Delta Z_{SUP} = 0,0347$ metri, quindi $\Delta Z = 0,0343$ metri. Facendo i calcoli la formula sopra riportata fornisce $\Delta\zeta = 192''$, che sottratto all'angolo zenitale misurato fornisce $47^\circ 52' 36''$ e porta a soli $5''$ la discrepanza con il valore teorico, cioè nella norma degli errori delle misure ai tempi di Cassini, che nei casi peggiori non eccedevano qualche decina di secondi d'arco ed erano sempre ben al di sotto del minuto primo.

B) Come correggere le tangenti dei lembi

Se invece si vogliono correggere direttamente le tangenti dei lembi solari rilevate sulla meridiana, si può procedere nel seguente modo. Prendiamo come esempio il lembo superiore: la tangente corretta $\tan(\zeta_{SUP})_C$ in funzione di quella misurata $\tan(\zeta_{SUP})$ è data da:

$$\tan(\zeta_{SUP})_C \approx \tan(\zeta_{SUP}) - \frac{\Delta Z_{SUP} \tan(\zeta_{SUP}) + \Delta X}{Z}$$

che si può scrivere in forma più compatta:

$$\tan(\zeta_{SUP})_C = \left(1 - \frac{\Delta Z_{SUP}}{Z}\right) \tan(\zeta_{SUP}) - \frac{\Delta X}{Z}$$

Un'espressione del tutto analoga vale ovviamente per la tangente del lembo inferiore. I valori di ΔZ si stimano come nel caso precedente, per interpolazione lineare delle quote riportate in tabella.

Con questi valori delle tangenti si procede come di consueto, secondo i metodi di Cassini [1], ampiamente descritti anche nel libro di Eustachio Manfredi [2]. Facendo

i calcoli, con i dati sopra riportati per il 12 Marzo 2003, si ottiene:

$$\tan(\zeta_{\text{SUP}})_C = 1,09453$$

$$\tan(\zeta_{\text{INF}})_C = 1,11593$$

e applicando a queste tangenti la correzione per la penombra, cioè l'alone intorno alla proiezione solare (**Fig. 9**), pari al raggio del foro (0,050 Moduli) diviso l'altezza gnomonica (100 Moduli):

$$\tan(\zeta_{\text{SUP}})_C = 1,09453 + 0,0005 = 1,09503$$

$$\tan(\zeta_{\text{INF}})_C = 1,11593 - 0,0005 = 1,11543$$

Ricavando gli angoli e depurandoli da rifrazione e parallassi¹¹, si ottiene:

$$\zeta_{\text{SUP}} = 47^\circ 36' 48''$$

$$\zeta_{\text{INF}} = 48^\circ 8' 24''$$

e dalla loro media aritmetica si ricava l'angolo zenitale del Sole: $47^\circ 52' 36''$.

C) Come calcolare a priori le tangenti osservate

E se l'osservatore volesse prevedere in anticipo in quali punti della meridiana passeranno i lembi della proiezione solare in un dato giorno? Come esempio prendiamo ancora il 12 Marzo 2003, così potremo verificare i calcoli confrontandone i risultati con le tangenti misurate in quel giorno. Alle ore 12 di Tempo Vero, il Sole aveva:

$$\text{declinazione } \delta = -3^\circ 22' 54''$$

$$\text{diametro } \phi = 32,2'$$

quindi, conoscendo la latitudine $\lambda = 44^\circ 29' 37''$ della meridiana (recentemente misurata da Paltrinieri con un GPS, in prossimità del foro gnomonico), l'angolo zenitale del Sole era:

$$\zeta_T = \lambda - \delta = 47^\circ 52' 31''$$

Noti questi dati di partenza, prima di effettuare i calcoli dobbiamo semplicemente **aggiungere** all'angolo zenitale ζ_T la correzione:

$$\Delta\zeta = \frac{\Delta Z \tan(\zeta_T) + \Delta X}{Z[1 + \tan^2(\zeta_T)]}$$

dove $\Delta X = 0,018$ metri, $Z = 27,07$ metri e $\Delta Z = 0,0344$ metri, che si ricava interpolando dalla tabella con $\tan(\zeta_T)$

¹¹ Si possono usare le formule moderne [6], oppure le stesse tabelle di Cassini [1][2], che risultano sorprendentemente precise nell'intervallo degli angoli zenitali del Sole alla latitudine di Bologna, con scostamenti, rispetto ai valori teorici, di 1-2 secondi d'arco.

$= 1,10576$ (110,576 Moduli). Si ottiene $\Delta\zeta = 192''$ e quindi l'angolo zenitale:

$$\zeta_M = \zeta_T + \Delta\zeta = 47^\circ 55' 43''$$

dopodiché si prosegue normalmente con i calcoli, percorrendo a ritroso le operazioni descritte dal Manfredi. Per maggior chiarezza riportiamo per esteso la procedura qui di seguito.

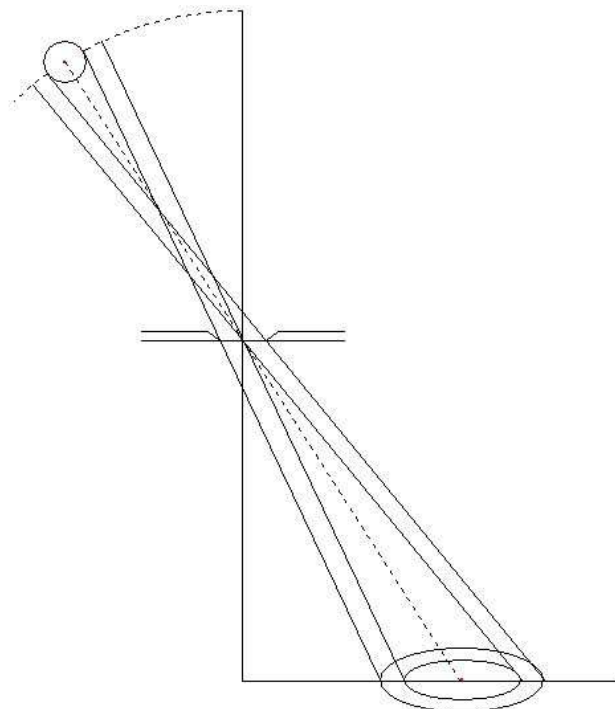


Fig. 9 L'alone intorno alla proiezione solare, di spessore pari al raggio del foro gnomonico.

Prima di tutto, siccome il diametro del disco solare misurato sulla meridiana risulta sempre sottostimato (a causa della luce diffusa presente nella basilica), e per ottenere quello corretto Cassini lo aumentava della sessantesima parte [2], ne consegue che, per calcolare le distanze apparenti delle proiezioni dei lembi solari dal Vertice, invece di $\phi = 32,2'$ dobbiamo usare un diametro ϕ_M più piccolo, tale che:

$$\phi = (1+1/60)\phi_M$$

cioè:

$$\phi_M = (60/61)\phi = 31' 40''$$

Con questo valore fittizio del diametro solare ricaviamo gli angoli zenitali dei lembi:

$$\zeta_{\text{SUP}} = \zeta_M - \phi_M/2 = 47^\circ 39' 53''$$

$$\zeta_{\text{INF}} = \zeta_M + \phi_M/2 = 48^\circ 11' 33''$$

e tenendo conto delle correzioni per la rifrazione e la parallassi [6]:

$$\zeta_{\text{SUP}} = 47^\circ 38' 53''$$

$$\zeta_{\text{INF}} = 48^\circ 10' 32''$$

Le distanze apparenti dei lembi dal Vertice, misurate in Moduli, compreso lo spessore dell'alone (0,050 Moduli), saranno quindi (**Fig.9**):

$$100 \times \tan(\zeta_{\text{SUP}}) - 0,050 = 109,649$$

$$100 \times \tan(\zeta_{\text{INF}}) + 0,050 = 111,798$$

in buon accordo con i valori 109,660 e 111,800 realmente misurati quel giorno. Siccome un Modulo corrisponde a 270,7 millimetri le rispettive discrepanze equivalgono a 3 millimetri e 0,6 millimetri.

Bibliografia

[1] Gian Domenico Cassini – *La Meridiana del Tempio di S. Petronio in Bologna* – Bologna, 1695 (riedizione a

cura di Giovanni Paltrinieri, Editore Forni, Bologna, 2000)

[2] Eustachio Manfredi – *De Gnomone Meridiano Bononiensi* – Bologna, 1736 (traduzione dal latino di Alessandro Gunella, inedita)

[3] Federigo Guarducci – *La Meridiana di Gian Domenico Cassini nel Tempio di S. Petronio di Bologna riveduta nel 1904 e nel 1925* – Bologna, 1925

[4] Giovanni Paltrinieri – *La Meridiana della Basilica di S. Petronio in Bologna* – Bologna, 2001

[5] John L. Heilbron – *The Sun in the Church* – Harvard University Press, Cambridge, 1999

[6] Jean Meeus – *Astronomical Algorithms* – Willmann-Bells, Inc., Richmond, Virginia, 1991

[7] Murray R. Spiegel – *Statistica* – Collana Schaum, Etas Kompass, Milano, 1973

[8] Philip R. Bevington – *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences* – Mc Graw-Hill, New York, 1969