

APPLICAZIONI DEL CALCOLO VETTORIALE ALLA GNOMONICA

TONINO TASSELLI

ESTRATTO

Viene esposto un metodo per il progetto degli orologi solari basato sul calcolo vettoriale. Il metodo consente il tracciamento degli orologi su superfici qualsiasi purché esprimibili in forma matematica. L'uso del calcolo vettoriale consente di separare nettamente l'aspetto proiettivo da quello puramente astronomico. In questo articolo il metodo viene applicato anche alla progettazione di orologi bifilari su superfici complesse e con i fili comunque disposti e non necessariamente rappresentati da rette. Per esempio i fili possono essere rappresentati da curve catenarie oppure possono essere delle curve sghembe (non piane) purché esprimibili in forma analitica.

CLASSIFICAZIONE DEGLI OROLOGI SOLARI DA UN PUNTO DI VISTA PROIETTIVO

È utile, al fine di definire degli acronimi che verranno utilizzati nel corso dell'esposizione che seguirà, considerare che, dal punto di vista proiettivo, gli orologi solari potrebbero essere suddivisi in due categorie.

Consideriamo il sistema orologio solare come l'insieme delle seguenti componenti: il sole (S), l'osservatore (O), il sistema gnomonico (G), la rete (R) costituita dalle curve orarie, diurne e da altre curve secondarie, il quadrante di proiezione (Q) ove si legge l'ora. Tenuto fuori il sole, per ovvi motivi di distanza, i restanti quattro elementi O, G, R, Q danno luogo a $4! = 24$ permutazioni (non tutte utili) che possono essere suddivise in due gruppi: quelle dove G precede R e quelle dove R precede G, ossia il gruppo SGR e il gruppo SRG. Ulteriori sottocategorie in seno a questi due gruppi si ottengono in base alla posizione dell'osservatore (O) e del quadrante di proiezione (Q), non sempre coincidente con (R).

Per esempio un classico orologio su parete verticale appartiene alla classe SGR (sottocategoria SOGR), l'osservatore legge l'ora guardando la proiezione di G su R. Q in questo caso non è indicato nell'acronimo poiché coincide con R.

Un grande orologio orizzontale come quello di Augusto o anche la camera oscura di S. M. degli Angeli sono orologi SGOR.

Un orologio sulla vetrata all'interno di una chiesa con gnomone all'esterno è un SGRO, quando l'osservatore legge l'ora sulla vetrata, ma se l'ora si leggesse proiettata sul pavimento allora l'orologio sarebbe uno SGROQ ove Q è il pavimento della chiesa.

Meno ricca di esemplari ma non meno interessante è la categoria di orologi SRG. L'orologio equatoriale cosiddetto a gnomone multiplo, come quello progettato dall'ing. Mesturini in una scuola elementare è un SORQQ e lo gnomone giace su Q.

A cavallo di queste classificazioni (SGR e SRG) c'è un orologio bifilare, ipotizzato da Savian [4], con un filo da un lato di R e l'altro oltre R. Tale orologio è ad esempio costruibile su una finestra e funziona proiettato su una parete. In questo caso si ha un SGRGOQ.

Il metodo di proiezione che verrà ora illustrato consiste nell'individuare analiticamente la direzione del raggio SG. Il raggio viene prolungato fino ad incontrare la superficie R nel caso di orologi SGR oppure il raggio trapassa R per raggiungere G nel caso di orologi SRG. I reticoli di curve che ne derivano nelle due classi sono reciproci (il basso diventa alto e la destra diventa sinistra come tra un oggetto e la sua immagine in una camera fotografica).

PROIEZIONE VETTORIALE

L'idea che sta alla base di questo metodo è la seguente: si determina l'espressione analitica delle coordinate del punto di intersezione tra una superficie (la superficie dell'orologio) e un raggio rettilineo proiettato da un punto (il punto gnomonico). Facendo poi variare la direzione del raggio proiettivo secondo una scansione conica che rappresenta il moto diurno del sole, si tracciano le curve caratteristiche dell'orologio sulla superficie data.

In un sistema di riferimento X, Y, Z (opportuna-mente scelto caso per caso) siano x_g, y_g, z_g le coordinate del punto gnomonico dell'orologio solare e sia $S_R(x, y, z) = 0$ l'equazione della superficie ove l'orologio dovrà essere disegnato.

Le equazioni parametriche di un raggio che si propaga in linea retta, applicato al punto x_g, y_g, z_g sono:

$$(1) \quad \begin{aligned} x(t) &= r_x t + x_g \\ y(t) &= r_y t + y_g \\ z(t) &= r_z t + z_g \end{aligned}$$

essendo r_x, r_y, r_z i coseni direttori che individuano la direzione del raggio e t un parametro che potremmo chiamare parametro di propagazione. Il raggio proiettivo parte da x_g, y_g, z_g quando $t = 0$ e si propaga con il variare di t nella direzione individuata dal versore di componenti r_x, r_y, r_z .

Per tracciare le curve caratteristiche dell'orologio (per esempio le linee diurne, le lemniscate orarie etc.) sulla superficie S_R di cui si conosce l'espressione matematica, si procede intanto con l'individuare il punto x, y, z in cui, fissato r_x, r_y e r_z , il raggio proiettivo incontrerà la superficie dell'orologio.

A tale scopo basterà risolvere il sistema:

$$(2) \quad \begin{cases} x(t) = r_x t + x_g \\ y(t) = r_y t + y_g \\ z(t) = r_z t + z_g \\ S_R(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

La soluzione è presto trovata risolvendo la seguente equazione in t :

$$(3) \quad S_R[x(t), y(t), z(t)] = 0$$

e sostituendo poi l'espressione di t trovata nelle equazioni parametriche del raggio si ottiene:

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= X(r_x, r_y, r_z, x_g, y_g, z_g) \\ y &= Y(r_x, r_y, r_z, x_g, y_g, z_g) \\ z &= Z(r_x, r_y, r_z, x_g, y_g, z_g) \end{aligned}$$

Una volta trovate le espressioni delle coordinate del punto ove il raggio proiettivo incontra la superficie dell'orologio, basta far variare adeguatamente il versore del nostro raggio in funzione di r_x, r_y e r_z in modo tale che siano automaticamente espresse le equazioni delle curve cercate.

I coseni direttori r_x, r_y, r_z possono essere espressi in termini di h e z (altezza e azimut) come nel libro di D. Savoie [1] ma meglio ancora direttamente in termini di declinazione δ ed angolo orario H (vedi più avanti).

Per tracciare una linea diurna, ad un determinato valore di δ , si mantiene costante δ mentre si varia H ; per tracciare una linea oraria, invece, si tiene costante H mentre si varia δ .

Se corrispondentemente a δ si corregge anche l'angolo H con l'equazione del tempo, si traccia una lemniscata oraria.

Anche altri sistemi orari possono essere tracciati. Ad esempio le ore italiche si tracciano ricavando preventivamente H (ora astronomica) dall'ora italica (si veda R. Anselmi [6])

Le curve dell'orologio vengono dunque calcolate per punti e se la superficie dell'orologio non è un piano queste curve non sono curve piane. Se la superficie non è sviluppabile su un piano (per esempio è una sfera) questo fatto rende il disegno delle curve abbastanza problematico e le espansioni delle coordinate dei punti vanno trasformate in una sorta di coordinate curvilinee da riportare con un metro flessibile sulla superficie dell'orologio.

In alternativa alle coordinate curvilinee, le coordinate x, y, z trovate possono essere trasformate in coordinate sferiche e riportate mediante un puntatore a laser posto sull'origine del sistema di riferimento X, Y, Z

Nel caso particolare in cui la superficie è sviluppabile su un piano (per esempio se la superficie è un cilindro o un cono) allora sarà opportuno disegnare l'orologio sul piano dello sviluppo della superficie stessa operando una idonea trasformazione delle coordinate (da spaziali a bidimensionali). Sarà poi facile riportare il foglio piano sulla superficie dell'orologio.

ESEMPIO 1

Per illustrare con qualche esempio questo metodo supponiamo innanzitutto di voler disegnare un semplice orologio piano verticale declinante. Per il sistema di riferimento abbiamo due scelte "ragionevoli": una è quella di usare una terna destrorsa XYZ e di appoggiare il piano XY sul piano dell'orologio cosicché Z esce normalmente dalla parete verso l'osservatore. Se si fa questa scelta allora nei coseni direttori r_x, r_y e r_z dobbiamo tener conto della declinazione della parete mentre l'equazione della superficie gnomonica sarà semplicemente $z = 0$ (cioè il piano XY).

L'altra opzione è quella di scegliere l'asse Z orientato Nord-Sud e allora, mentre i coseni direttori r_x, r_y e r_z sono espressi in modo più semplice, l'equazione del piano dell'orologio, che supponiamo contenere l'asse Y diventa: $z = \tan(d) x$

Un po' di esperienza nella pratica di questo metodo ci suggerisce che è preferibile scegliere il sistema di riferimento che mantiene semplice l'equazione della superficie piuttosto che le espressioni dei coseni direttori, quindi nel caso dell'orologio verticale declinante conviene la prima delle due opzioni. E allora si supponga che il riferimento XYZ sia tale che il piano XY coincida con il piano dell'orologio e che l'asse Z sia ad esso normale. Il punto gnomonico giaccia sull'asse Z a distanza g dal piano XY .

Si avrà:

$$(5) \quad \begin{aligned} x(t) &= r_x t \\ y(t) &= r_y t \\ z(t) &= r_z t + g \end{aligned}$$

e facendo sistema con l'equazione della superficie gnomonica $z = 0$ si avrà:

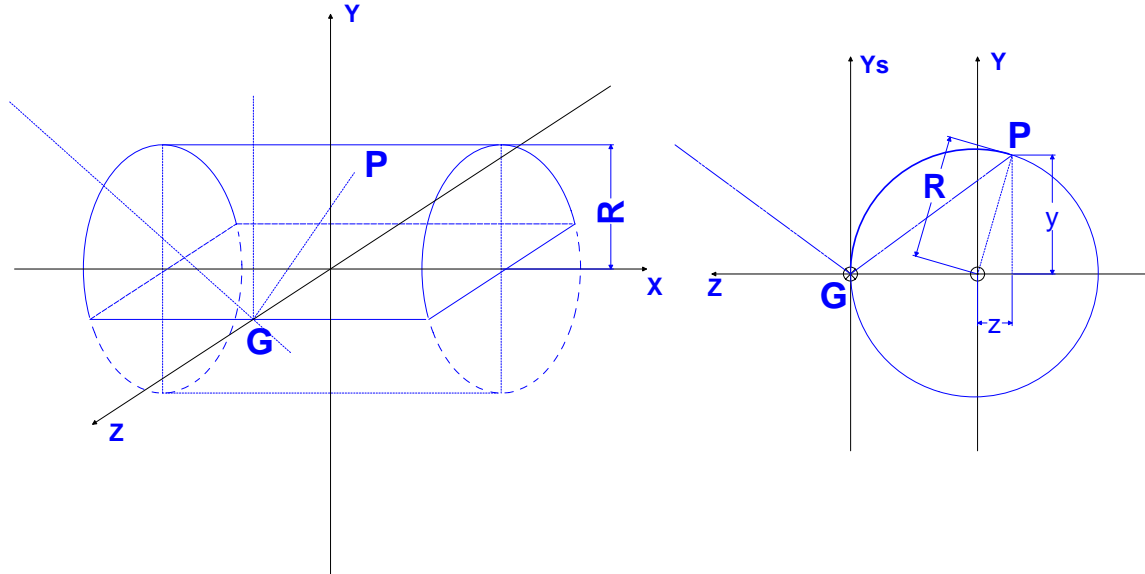


Fig. 1

$$(6) \quad \begin{cases} x(t) = r_x t \\ y(t) = r_y t \\ z(t) = r_z t + g \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow (r_z t + g = 0) \rightarrow (t = \frac{-g}{r_z}) \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -g \frac{r_x}{r_z} \\ y = -g \frac{r_y}{r_z} \\ z = 0 \end{cases}$$

Le coordinate tridimensionali x e y trovate coincidono con le coordinate bidimensionali x, y sul piano dell'orologio perciò non è necessaria alcuna trasformazione.

In definitiva, utilizzando le espressioni di r_x, r_y e r_z calcolate in (23) se il piano dell'orologio è declinante o in (26) se il piano è anche inclinato, avremo per le coordinate x_s, y_s :

$$(7) \quad \begin{aligned} x_s &= -g \frac{r_x}{r_z} \\ y_s &= -g \frac{r_y}{r_z} \end{aligned}$$

Nel programma che traccia per punti l'orologio, ovviamente conviene prima calcolare a parte i coseni direttori r_x, r_y e r_z e poi, con due semplici rapporti, x_s, y_s .

ESEMPIO 2

Come secondo esempio, un po' più complicato ma che mette in evidenza la flessibilità e in fondo la semplicità del calcolo vettoriale, si considera un orologio catottrico su un cilindro orizzontale (Fig. 1).

Si è scelto questo esempio pensando al famoso orologio a riflessione disegnato su una volta all'interno del palazzo Spada a Roma. Scegliamo il sistema di riferimento in modo tale che l'asse X rappresenti proprio l'asse del cilindro orizzontale. Il punto gnomonico sarà sull'asse Z a distanza R dall'asse, con R pari al raggio della volta.

L'equazione della superficie è:

$$(8) \quad y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Il punto gnomonico ha coordinate:

$$(9) \quad x_g = 0 \quad y_g = 0 \quad z_g = R$$

e quindi possiamo impostare il seguente sistema tra le equazioni della superficie e quelle del raggio proiettivo:

$$(10) \quad \begin{cases} x(t) = r_x t \\ y(t) = r_y t \\ z(t) = r_z t + R \\ y^2 + z^2 - R^2 = 0 \end{cases}$$

che dà luogo alla seguente equazione in t :

$$(11) \quad \begin{aligned} (r_y t)^2 + (r_z t + R)^2 - R^2 &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow ((r_y^2 + r_z^2)t + 2Rr_z)t &= 0 \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono:

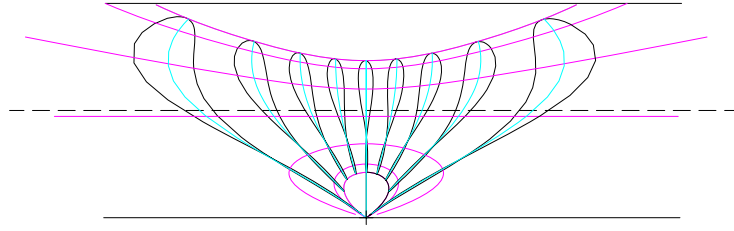


Fig. 2

$$(12) \quad \begin{aligned} t &= 0 \\ t &= -\frac{2Rr_z}{r_y^2 + r_z^2} \end{aligned}$$

La soluzione per $t = 0$ corrisponde al punto ove il raggio proiettivo entra nel cilindro (punto gnomonico) mentre l'altra, sostituita nelle equazioni del raggio proiettivo, fornisce le coordinate tridimensionali del punto in cui il raggio colpisce la volta e sono:

$$(13) \quad \begin{cases} x = -\frac{2Rr_z r_x}{r_y^2 + r_z^2} \\ y = -\frac{2Rr_z r_y}{r_y^2 + r_z^2} \\ z = -\frac{2Rr_z^2}{r_y^2 + r_z^2} + R \end{cases}$$

Al fine di velocizzare il programma si calcola dapprima r_x , r_y e r_z , usando le (20) se la volta è orientata est-ovest o le (23) se è declinante, poi t e infine si sostituiscono questi valori nelle equazioni del raggio di proiezione.

Arrivati a questo punto, a differenza dell'esempio precedente, occorre un ulteriore passaggio per trasformare queste coordinate in modo che sia facile riportarle sulla superficie dell'orologio.

Come trasformare le coordinate va visto caso per caso, ma quando la superficie è sviluppabile su un piano, come avviene per il cilindro, nasce spontaneo trasformare queste coordinate tridimensionali in coordinate bidimensionali su un piano che rappresenta lo sviluppo del cilindro stesso. Il disegno su questo piano può essere utilizzato per approntare il foglio da riadagiare all'interno della volta per effettuare lo spolvero. Immaginiamo di tagliare il cilindro lungo la generatrice opposta al punto gnomonico e consideriamo un nuovo sistema di riferimento bidimensionale $X_s Y_s$ con origine sul punto gnomonico. Si avrà, per le nuove coordinate:

$$(14) \quad \begin{aligned} x_s &= -x \\ \text{per } z \geq 0 & \quad y_s = R \arcsin\left(\frac{y}{R}\right) \\ \text{per } z < 0 & \quad y_s = R\left(\frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{y}{R}\right)\right) \end{aligned}$$

che producono lo sviluppo riportato in fig. 2

La coordinata x cambia di segno perché immaginiamo di porci all'interno del cilindro con l'asse X_s del foglio che punta a destra se guardiamo il punto gnomonico.

In alternativa alla conversione di x, y, z in coordinate di X_s, Y_s si può convertire x, y, z in un azimut e in una altezza e riportare queste coordinate sferiche sulla volta ponendo al centro del sistema X, Y, Z un puntatore laser montato su un treppiede e un sistema di goniometri altazimutali con nonio.

CONSIDERAZIONI

Facciamo ora alcune considerazioni sulla scelta del sistema di riferimento XYZ e sul tipo e sul segno dei coseni direttori del raggio di proiezione r_x , r_y e r_z .

Abbiamo finora visto un esempio di orologio classico e uno catottrico. In entrambi i casi i coseni direttori r_x , r_y e r_z usati possono essere più o meno complicati a seconda che si debba o no tener conto della declinazione del quadro o dell'asse del cilindro nel caso dell'orologio a volta. Pertanto le espressioni di r_x , r_y e r_z verranno scelte, secondo i casi, in modo opportuno tra quelle indicate nella sezione che segue *Espressioni dei coseni direttori*. Inoltre si ricordi che nel caso di orologio catottrico con lo specchio orizzontale occorre invertire di segno il coseno direttore r_y . Nel caso di orologi per trasparenza il sistema di riferimento sarà scelto in modo tale da avere l'asse z uscente dalla faccia nord del piano e pertanto, se vogliamo per comodità mantenere il sistema XYZ destrorso dovremo invertire i segni sia di r_z che di r_x .

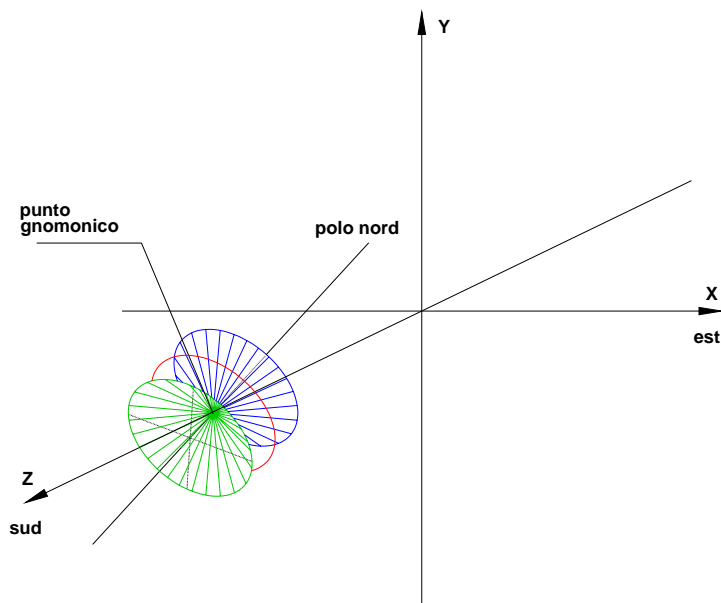


Fig. 3

Il metodo oggetto di questo articolo si presta bene anche al tracciamento di orologi ove è la superficie gnomonica (che dovrà essere in qualche modo trasparente) ad essere proiettata sul punto gnomonico e non viceversa (orologi SRG). In questo caso si potrebbe pensare che si debba invertire tutti e tre i segni di r_x , r_y e r_z in modo che il percorso del raggio di proiezione sia dal punto gnomonico verso il sole intercettando la superficie dove tracciare le linee¹. Tuttavia una più attenta analisi ci mostra subito che quello che è importante non è tanto individuare quale sia il verso ma piuttosto la direzione del raggio di proiezione; vorrà dire che, se non si cambia il verso al raggio, mediante il cambio di segno di tutti e tre i coseni direttori, la soluzione dell'equazione in t per l'intercettazione della superficie darà luogo a valori di t di segno opposto come se il raggio si propagasse a ritroso dal punto gnomonico verso il sole intercettando comunque la superficie.

Quindi, indipendentemente dal verso del raggio, otterremo comunque le stesse coordinate per il punto di intersezione con la superficie.

Per questo tipo orologi SRG, essendo la soluzione di t di segno opposto rispetto a quella che si avrebbe per una analogia proiezione SGR, si otterranno valori di coordinate x,y,z uguali ma opposti e quindi la rete di curve che si ottengono per un orologio SRG è reciproca rispetto alla analogia rete di un orologio SGR (l'alto diventa basso, la sinistra diventa destra).

¹ Tracciare le linee se la superficie è trasparente o praticare le fessure se le linee devono essere fotosciateriche.

ESPRESSIONI DEI COSENI DIRETTORI r_x, r_y, r_z

Risolto l'aspetto proiettivo del problema del tracciamento dell'orologio, dedichiamoci ora ad esprimere in forma semplice i coseni direttori, r_x, r_y e r_z del vettore raggio di proiezione, in funzione di H e di δ .

Per far questo è bene innanzitutto fare una scelta oculata del sistema di riferimento X,Y,Z da usare; questo ci dovrà consentire di esprimere sia r_x, r_y e r_z sia l'equazione della superficie nel modo più semplice (semplificato) possibile ed occorrerà trovare un compromesso tra le due esigenze.

Solo allo scopo di illustrare il concetto, consideriamo il caso semplice di un orologio piano su una parete verticale rivolta esattamente a sud. Converterà scegliere un sistema di riferimento X,Y,Z con il piano XY coincidente col piano dell'orologio e con l'asse Z perpendicolare ad esso e tale da contenere il punto gnomonico.

L'asse z punta verso sud e passa per il punto gnomonico, l'asse X sarà puntato verso est e l'asse Y verso lo zenith.

Noi osserveremo il sistema di riferimento con le spalle verso sud e guardando verso nord (Fig. 3).

Sul punto gnomonico sarà applicato il vettore del raggio solare che, a seconda del valore di δ descriverà un cono con la concavità verso il polo nord o una circonferenza sul piano equatoriale o un cono con la concavità verso il polo sud. Si noti bene che quando il sole è sotto l'equatore il nostro vettore descriverà la falda del cono verso il polo nord e viceversa, quando il sole è sopra l'equatore il vettore descriverà la falda di cono verso il polo sud (infatti il vettore indica il verso, opposto al sole, ove si proietta il punto gnomonico).

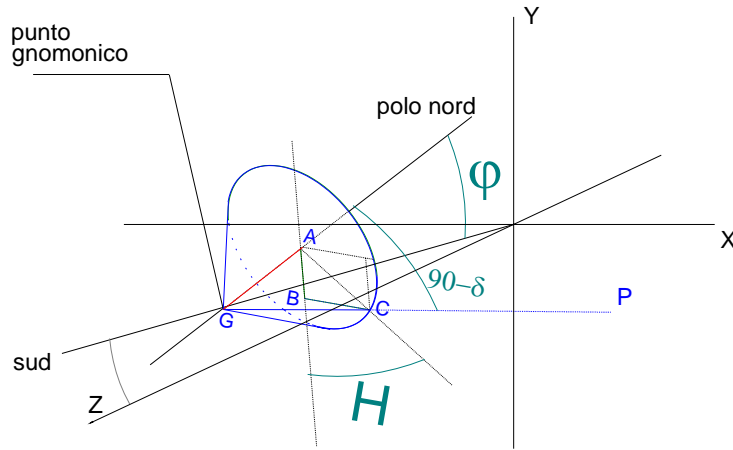


Fig. 4

Nel sistema di riferimento così scelto la superficie gnomonica sarà definita dall'equazione $z = 0$ mentre per definire r_x , r_y e r_z in termini di declinazione del sole e di angolo orario, pensiamo il versore \overline{GC} , che scandisce il moto del sole, scomposto in tre vettori per i quali sia facile individuare le componenti in x , y e z . (questo metodo viene indicato in Appendice B).

Un altro efficace e generale metodo di ottenere i coseni direttori r_x , r_y e r_z è quello di considerare H , δ , φ inizialmente nulli (vedi Fig. 5) in modo tale che il cono abbia l'asse coincidente con l'asse Z e il versore \overline{GC} stia sul piano meridiano e giaccia sull'asse Y . (Si noti che \overline{GC} e l'asse del cono insieme individuano un piano orario).

Sarà facile ora, con successive rotazioni attorno agli assi principali, posizionare \overline{GC} nella giusta direzione. Le rotazioni devono essere impartite con un ordine ben preciso come se giocassimo con il cubo di Rubik affinché la rotazione di \overline{GC} attorno all'asse polare venga correttamente scomposta in semplici rotazioni attorno agli assi principali.

Pertanto, partendo dalla Fig. 5a, operiamo prima una rotazione δ attorno all'asse X , poi una rotazione H attorno all'asse Z per posizionare \overline{GC} secondo il piano orario che si vuole considerare e infine una rotazione φ attorno all'asse X per riportare l'asse del cono a puntare verso il polo nord.

Come è noto uno dei modi per ruotare un vettore attorno ad un asse è quello di ricorrere all'algebra delle matrici. (v. Appendice A)

Chiameremo $R_\alpha^X, R_\alpha^Y, R_\alpha^Z$ le tre matrici che operano una rotazione di un angolo α attorno, rispettivamente, all'asse X , all'asse Y e all'asse Z .

$$(15) \quad \begin{aligned} R_\alpha^X &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ R_\alpha^Y &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ R_\alpha^Z &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Così come sono state definite le matrici, la rotazione del vettore avverrà in senso antiorario se α è positivo (regola della mano destra). Non si confondano queste matrici con le analoghe trasposte (cioè ribaltate rispetto alla diagonale principale) che operano una rotazione degli assi cartesiani.

Ora, partendo dalla Fig. 5a si ha, per le componenti iniziali di \overline{GC} :

$$(16) \quad r_x = 0 \quad r_y = -1 \quad r_z = 0$$

Le nuove componenti di r_x , r_y e r_z dopo la rotazione, indicata in Fig. 5b, di un angolo δ attorno all'asse X diventano:

$$(17) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & -\sin \delta \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \delta \\ -\sin \delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dopo la rotazione, indicata in Fig. 5c, di un angolo H attorno all'asse Z si ha:

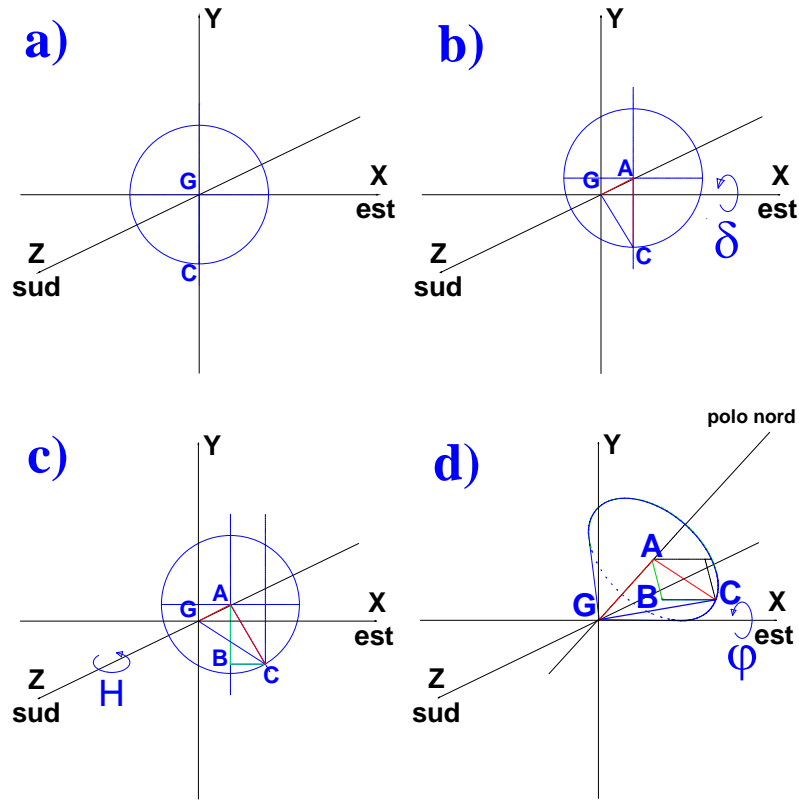


Fig 5

$$(18) \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos H & -\sin H & 0 \\ \sin H & \cos H & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \delta \\ -\sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \sin H \\ -\cos \delta \cos H \\ -\sin \delta \end{pmatrix}$$

e infine, dopo la rotazione, indicata in Fig. 5d, di un angolo φ di nuovo attorno all'asse X:

$$(19) \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \sin H \\ -\cos \delta \cos H \\ -\sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \sin H \\ -\cos \delta \cos H \cos \varphi + \sin \delta \sin \varphi \\ -\cos \delta \cos H \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Ci sono da fare alcune considerazioni sui segni di H , δ e φ per vedere se il verso di rotazione da noi scelto coincide con le convenzioni adottate in gnomonica e per tener conto che il nostro interesse è focalizzato sul versore di proiezione \overline{GC} la cui direzione è opposta a quella del vettore applicato al punto gnomonico e diretto verso il sole.

Ciò premesso:

Per quanto riguarda φ nulla da dire; alla nostra rotazione positiva l'asse del cono è stato puntato verso il polo nord.

Riguardo all'angolo H esso è considerato positivo quando il piano orario ha superato il meridiano. Effettivamente quando il sole va verso ovest la componente x di \overline{GC} diventa positiva.

Per quanto riguarda δ invece, il versore \overline{GC} punta verso nord quando il sole scende sotto l'equatore (cioè per $\delta < 0$) perciò o la prima delle nostre rotazioni si effettua in senso inverso ($-\delta$) oppure nel risultato finale si cambia segno ai termini ove compare $\sin \delta$.

In definitiva:

$$(20) \begin{aligned} r_x &= \cos \delta \sin H \\ r_y &= -\cos \delta \cos H \cos \varphi - \sin \delta \sin \varphi \\ r_z &= -\cos \delta \cos H \sin \varphi + \sin \delta \cos \varphi \end{aligned}$$

Quest'ultima relazione poteva essere ricavata subito con una sola matrice di rotazione ottenuta dal prodotto di tutte le matrici esprimenti una rotazione attorno ai vari assi nella sequenza indicata:

$$(21) \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = (R_\varphi^X (R_H^Z (R_{-\delta}^X))) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (R_\varphi^X R_H^Z R_{-\delta}^X) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In qualche caso ci può essere utile anche una ulteriore rotazione attorno all'asse Y per tener conto della

declinazione della parete qualora l'asse Z del nostro sistema di riferimento non fosse rivolto a sud ma fosse normale alla parete declinante. Si consideri, ad esempio, una parete declinante verso ovest (d positiva). Mentre la parete viene ruotata di un angolo d attorno l'asse Y il nostro versore \overline{GC} subisce una rotazione in senso antiorario (quindi positiva) attorno all'asse Y , perciò:

$$(22) \quad R_d^Y = \begin{pmatrix} \cos d & 0 & \sin d \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin d & 0 & \cos d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \sin H \\ -\cos \delta \cos H \cos \varphi - \sin \delta \sin \varphi \\ -\cos \delta \cos H \sin \varphi + \sin \delta \cos \varphi \end{pmatrix}$$

ottenendo:

$$(23) \quad \begin{aligned} r_x &= \cos d \cos \delta \sin H \\ &\quad - \sin d \cos \delta \cos H \sin \varphi \\ &\quad + \sin d \sin \delta \cos \varphi \\ r_y &= -\cos \delta \cos H \cos \varphi \\ &\quad - \sin \delta \sin \varphi \\ r_z &= -\sin d \cos \delta \sin H \\ &\quad - \cos d \cos \delta \cos H \sin \varphi \\ &\quad + \cos d \sin \delta \cos \varphi \end{aligned}$$

Anche quest'ultima relazione poteva essere ricavata subito con una sola matrice di rotazione ottenuta dal prodotto di tutte le matrici esprimenti le rotazioni semplici attorno ai vari assi nella sequenza indicata:

$$(24) \quad \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = (R_d^Y (R_\varphi^X (R_H^Z (R_{-\delta}^X \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})))) = \\ = (R_d^Y R_\varphi^X R_H^Z R_{-\delta}^X) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per tener conto anche di un'eventuale inclinazione del piano XY si deve effettuare anche un'altra rotazione attorno all'asse X pari ad un angolo i (inclinazione). Per quanto riguarda il segno di i si noti che se si considera positiva l'inclinazione che ruota il sistema di riferimento in senso orario attorno l'asse X allora il versore \overline{GC} ruoterà in senso antiorario (cioè positivo).

La matrice totale di rotazione sarà:

$$(25) \quad (R_i^X R_d^Y R_\varphi^X R_H^Z R_{-\delta}^X)$$

e da luogo alla formula finale omnicomprensiva:

$$(26) \quad \begin{aligned} r_x &= \cos d \cos \delta \sin H \\ &\quad + \cos \varphi \sin d \sin \delta \\ &\quad - \cos H \cos \delta \sin d \sin \varphi \\ r_y &= -\cos H \cos i \cos \delta \cos \varphi \\ &\quad - \cos d \sin i \sin \delta \cos \varphi \\ &\quad + \cos \delta \sin d \sin H \sin i \\ &\quad + \cos d \cos H \cos \delta \sin i \sin \varphi \\ &\quad - \cos i \sin \delta \sin \varphi \\ r_z &= -\cos i \cos \delta \sin d \sin H \\ &\quad - \cos H \cos \delta \cos \varphi \sin i \\ &\quad + \cos d \cos i \cos \varphi \sin \delta \\ &\quad - \cos d \cos H \cos i \cos \delta \sin \varphi \\ &\quad - \sin i \sin \delta \sin \varphi \end{aligned}$$

Per calcolare la (26) è forse più pratico, dal punto di vista computazionale, utilizzare una routine che moltiplica una matrice per un vettore ed applicarla in successione fornendo ogni volta come parametri l'indice dell'asse (per individuare la struttura della matrice di rotazione), l'angolo di rotazione e le componenti del vettore da ruotare.

Se il progetto, invece di riguardare un orologio classico rivolto verso sud (con declinazione o no), consistesse invece nel disegnare un orologio piano verticale che funziona per trasparenza (ad esempio si voglia disegnare l'orologio su una finestra rivolta a sud), sarebbe conveniente invertire l'asse Z , in modo che punti verso nord, e l'asse X , in modo che punti verso ovest, e guardare l'orologio con le spalle a nord e rivolti verso sud. Basterà allora, per quanto riguarda i coseni direttori r_x , r_y e r_z , cambiare di segno a r_x e a r_z . Si noti che con queste inversioni di segno non abbiamo cambiato direzione al raggio proiettivo ma abbiamo espresso la stessa direzione sul un nuovo sistema di riferimento.

Se l'orologio che dobbiamo costruire è invece catottrico (tipo quello di palazzo Spada a Roma) allora nella formula ricavata sopra per r_x , r_y e r_z invertiremmo il segno a r_y in modo che la proiezione, che avrebbe puntato verso il basso, punti in alto secondo la legge della riflessione.

Ovviamente questi esempi non esauriscono tutti i casi e pertanto sarà l'esperienza che di volta in volta suggerirà il sistema di riferimento più opportuno ma quello che è importante mettere in evidenza è che l'aspetto trigonometrico del tracciamento dell'orologio è tutto concentrato nella determinazione di r_x , r_y e r_z mentre l'aspetto proiettivo prescinde completamente da quello trigonometrico ed è stato trattato a parte.

OROLOGI BIFILARI

Il metodo finora illustrato si estende facilmente al caso di orologi bifilari.

Per tracciare le curve caratteristiche dell'orologio bifilare su una superficie di cui si conosca

l'espressione matematica occorre determinare, per ogni specifica coppia di interesse H , δ (angolo orario, declinazione), qual è l'intersezione delle curve che rappresentano l'ombra dei due fili. La prima parte della soluzione del problema consiste dunque nel determinare le equazioni delle curve ombra dei fili partendo dalle equazioni parametriche dei fili stessi e poi si risolve il sistema di equazioni rappresentanti le ombre per trovare la loro intersezione.

Per determinare l'equazione dell'ombra di un filo sulla superficie dell'orologio si parte dalle equazioni di un punto di intersezione di un raggio (orientato H , δ e quindi r_x, r_y, r_z) con la superficie assegnata.

Le equazioni di tale punto sono già state trovate risolvendo il sistema (2) e sono rappresentate da:

$$(27) \quad \begin{aligned} x &= X(r_x, r_y, r_z, x_g, y_g, z_g) \\ y &= Y(r_x, r_y, r_z, x_g, y_g, z_g) \\ z &= Z(r_x, r_y, r_z, x_g, y_g, z_g) \end{aligned}$$

ove r_x, r_y, r_z derivano dal particolare istante H, δ preso in considerazione e x_g, y_g, z_g sono le coordinate del punto di applicazione del raggio (cioè il punto gnomonico). Pensando al filo come ad un luogo di punti gnomonici, per trovare la equazione della proiezione del filo sulla superficie basta "far scorrere" il punto x_g, y_g, z_g lungo il filo stesso.

Siano date le equazioni parametriche dei fili 1 e 2, con parametri s_1 e s_2

$$(28) \quad \begin{array}{cc} x_{g1}(s_1) & x_{g2}(s_2) \\ y_{g1}(s_1) & e \quad y_{g2}(s_2) \\ z_{g1}(s_1) & z_{g2}(s_2) \end{array}$$

Le due curve ombra saranno allora espresse dalle seguenti equazioni in forma parametrica:

$$(29) \quad \begin{aligned} x_1(s_1) &= X[r_x, r_y, r_z, x_{g1}(s_1), y_{g1}(s_1), z_{g1}(s_1)] \\ y_1(s_1) &= Y[r_x, r_y, r_z, x_{g1}(s_1), y_{g1}(s_1), z_{g1}(s_1)] \\ z_1(s_1) &= Z[r_x, r_y, r_z, x_{g1}(s_1), y_{g1}(s_1), z_{g1}(s_1)] \\ x_2(s_2) &= X[r_x, r_y, r_z, x_{g2}(s_2), y_{g2}(s_2), z_{g2}(s_2)] \\ y_2(s_2) &= Y[r_x, r_y, r_z, x_{g2}(s_2), y_{g2}(s_2), z_{g2}(s_2)] \\ z_2(s_2) &= Z[r_x, r_y, r_z, x_{g2}(s_2), y_{g2}(s_2), z_{g2}(s_2)] \end{aligned}$$

Per ottenere le equazioni che esprimono le coordinate del punto x, y, z (della superficie dell'orologio) dove si incontrano le due ombre, cerchiamo il valore dei parametri s_1 e s_2 che rendono coincidenti le curve ombra mettendo a sistema le seguenti equazioni:

$$(30) \quad (x, y, z) \equiv \begin{cases} x_1(s_1) = x_2(s_2) \\ y_1(s_1) = y_2(s_2) \\ z_1(s_1) = z_2(s_2) \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema fornirà i valori di s_1 e di s_2 che sostituiti ciascuno (ma basta uno) nella relativa tripletta di equazioni parametriche dell'ombra di un filo ci daranno le coordinate del

punto di incontro delle due curve che per costruzione deve appartenere anche alla superficie dell'orologio.

Per ricavare le curve dell'orologio sulla superficie basterà ora variare i coseni direttori r_x, r_y, r_z del raggio proiettivo mantenendo costante H e variando δ (curve orarie) o mantenendo costante δ e variando H (curve diurne).

Passiamo ora ad illustrare con qualche esempio il metodo del calcolo vettoriale applicato agli orologi bifilari.

OROLOGIO BIFILARE – ESEMPIO 1

Per semplicità, ma senza perdita di generalità, utilizzeremo come superficie gnomonica un piano verticale e come primo esempio pensiamo di utilizzare due fili rappresentati da due rette sghembe e non necessariamente parallele al piano dell'orologio. Anziché sviluppare una espressione finale un po' troppo complicata facciamo però per tempo delle semplificazioni, ma non prima di aver fatto vedere che, volendo, si possono ottenere, per le coordinate di tracciamento, delle espressioni del tutto generali derivanti dal fatto che i fili potrebbero essere comunque disposti nello spazio. Per esempio, come casi particolari, consideriamo che i due fili siano paralleli al piano e che uno sia orizzontale e l'altro verticale. Poi supponiamo che i fili siano incrociati a 45° oppure siano disposti uno parallelo alla linea sustilare e l'altro perpendicolare ad esso.

Infine, come ulteriore esempio supponiamo che un filo sia rappresentato da un retta verticale e l'altro sia disposto secondo una catenaria che per semplicità, ma senza perdita di generalità supporremo distesa su un piano verticale parallelo al piano dell'orologio.

Supponiamo dunque di voler tracciare le curve caratteristiche di un orologio bifilare piano verticale declinante con il sistema gnomonico costituito da due fili comunque sghembi. Fissiamo il sistema di riferimento XYZ in modo tale che il filo 1 e il filo 2 intercettino entrambi una retta perpendicolare al piano XY dell'orologio a distanza rispettivamente d_1 e d_2 . L'intersezione di tale retta col piano dell'orologio sarà l'origine del nostro sistema di riferimento e la retta che intercetta entrambi i fili sarà l'asse Z .

Siano:

$$(31) \quad \begin{aligned} x_{g1}(s_1) &= a_1 s_1 & x_{g2}(s_2) &= a_2 s_2 \\ y_{g1}(s_1) &= b_1 s_1 & y_{g2}(s_2) &= b_2 s_2 \\ z_{g1}(s_1) &= c_1 s_1 + d_1 & z_{g2}(s_2) &= c_2 s_2 + d_2 \end{aligned}$$

le equazioni parametriche delle rette che rappresentano rispettivamente il filo 1 ed il filo 2 ove a_1, b_1, c_1 sono i coseni direttori della retta relativa al filo 1 e d_1 è l'intercetta sull'asse Z . Analogamente a_2, b_2, c_2, d_2 sono i coseni direttori della retta filo 2 e l'intercetta sull'asse Z .

Sostituendo queste equazioni nelle espressioni dei raggi e facendo sistema con l'equazione della superficie dell'orologio (nel nostro caso $z = 0$) otterremo le due equazioni che rappresentano le due ombre sul

piano dell'orologio in funzione, oltre che dei coseni direttori dei raggi, anche dei parametri s_1 e s_2 .

Per l'ombra del filo 1 si ha:

$$(32) \quad \begin{cases} x_1(s_1) = r_x t + a_1 s_1 \\ y_1(s_1) = r_y t + b_1 s_1 \\ z_1(s_1) = r_z t + c_1 s_1 + d_1 \\ z = 0 \end{cases} \\ \rightarrow (r_z t + c_1 s_1 + d_1 = 0) \rightarrow \\ \rightarrow (t = -\frac{c_1 s_1 + d_1}{r_z}) \rightarrow \\ \begin{cases} x_1(s_1) = a_1 s_1 - \frac{r_x (c_1 s_1 + d_1)}{r_z} \\ y_1(s_1) = b_1 s_1 - \frac{r_y (c_1 s_1 + d_1)}{r_z} \end{cases}$$

e analogamente per l'ombra del filo 2.

Per trovare l'intersezione tra le due ombre si deve trovare il valore di un parametro (s_1 o s_2) tale da rendere uguali tra loro le coordinate delle ombre stesse e sostituirlo nella propria terna. Per trovare s_1 e s_2 si risolve il sistema:

$$(33) \quad \begin{cases} x_1(s_1) = x_2(s_2) \\ y_1(s_1) = y_2(s_2) \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} a_1 s_1 - \frac{r_x (c_1 s_1 + d_1)}{r_z} = a_2 s_2 - \frac{r_x (c_2 s_2 + d_2)}{r_z} \\ b_1 s_1 - \frac{r_y (c_1 s_1 + d_1)}{r_z} = b_2 s_2 - \frac{r_y (c_2 s_2 + d_2)}{r_z} \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$$(34) \quad s_1 = -\frac{(d_2 - d_1)b_2 r_x + (d_1 - d_2)a_2 r_y}{(b_1 c_2 - b_2 c_1)r_x + (a_2 c_1 - a_1 c_2)r_y + (a_1 b_2 - a_2 b_1)r_z} \\ s_2 = -\frac{(d_2 - d_1)b_1 r_x + (d_1 - d_2)a_1 r_y}{(b_1 c_2 - b_2 c_1)r_x + (a_2 c_1 - a_1 c_2)r_y + (a_1 b_2 - a_2 b_1)r_z}$$

Ora, avendo ottenuto l'espressione dei parametri che uguagliano le coordinate delle due ombre, per avere l'espressione di tali coordinate (cioè del punto di intersezione delle due ombre) basta ad esempio sostituire s_1 nell'equazioni di x_1 e y_1 oppure s_2 nell'equazioni di x_2 e y_2 .

Facciamo ora varie ipotesi semplificative:

Supponiamo dapprima che il filo 1 sia orizzontale ed il filo 2 sia verticale. Ciò implica per i rispettivi coseni direttori:

$$(35) \quad \begin{aligned} \text{filo orizzontale} &\rightarrow a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 0 \\ \text{filo verticale} &\rightarrow a_2 = 0, b_2 = 1, c_2 = 0 \end{aligned}$$

Questo consente una notevole semplificazione di s_1 e s_2 :

$$(36) \quad \begin{aligned} s_1 &= \frac{(d_1 - d_2)r_x}{r_z} \\ s_2 &= \frac{(d_2 - d_1)r_y}{r_z} \end{aligned}$$

Sostituendo ad esempio s_1 nelle x_1 e y_1 si hanno finalmente le coordinate del punto da tracciare sulla superficie dell'orologio:

$$(37) \quad \begin{aligned} x_s &= \frac{-d_2 r_x}{r_z} \\ y_s &= \frac{-d_1 r_y}{r_z} \end{aligned}$$

La stessa cosa si sarebbe ottenuta sostituendo s_2 nelle x_2 e y_2 .

OROLOGIO BIFILARE – ESEMPIO 2

Come altro esempio supponiamo che il filo 1 e il filo 2 siano incrociati a mo' di croce di S. Andrea.

Ciò implica per i rispettivi "coseni direttori"²:

$$(38) \quad \begin{aligned} a_1 &= 1, & b_1 &= 1, & c_1 &= 0 \\ a_2 &= -1, & b_2 &= 1, & c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Questo consente di semplificare le espressioni (34) di s_1 e s_2 nelle:

$$(39) \quad \begin{aligned} s_1 &= \frac{(d_1 - d_2)(r_x + r_y)}{2r_z} \\ s_2 &= \frac{(d_1 - d_2)(r_x - r_y)}{2r_z} \end{aligned}$$

e quindi, sostituendo ad esempio s_1 nelle x_1 e y_1 , si hanno le coordinate del punto da tracciare sulla superficie dell'orologio:

$$(40) \quad \begin{aligned} x_s &= -\frac{d_1(r_x - r_y) + d_2(r_x + r_y)}{2r_z} \\ y_s &= \frac{d_1(r_x - r_y) - d_2(r_x + r_y)}{2r_z} \end{aligned}$$

Si noti che per i precedenti due orologi non abbiamo fatto alcuna ipotesi sull'eventuale declinazione del quadro ma basta tenerne conto sul tipo di coseni direttori r_x, r_y, r_z che viene impiegato nei calcoli.

OROLOGIO BIFILARE – ESEMPIO 3

Se invece vogliamo da subito tener conto della declinazione del quadro, è consuetudine orientare il filo interno (per esempio il filo 2) secondo la direzione della sustilare e quello esterno (di conseguenza il filo 1) ortogonale ad esso secondo la direzione

² In realtà i veri coseni direttori sono:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2}/2, & b_1 &= \sqrt{2}/2, & c_1 &= 0 \\ a_2 &= -\sqrt{2}/2, & b_2 &= \sqrt{2}/2, & c_2 &= 0 \end{aligned}$$

ma il risultato non cambia se per esprimere la direzione poniamo comunque valori proporzionali ai coseni direttori. In questo caso il valore 1 è più comodo.

dell'equinoziale. Definiamo allora σ l'angolo formato dalla sustilare con la linea meridiana:

$$(41) \quad \sigma = \arctan\left(\frac{\cos \varphi \sin d}{\sin \varphi}\right)$$

Per i coseni direttori dei fili avremmo:

$$(42) \quad \begin{aligned} a_1 &= \cos \sigma, & b_1 &= -\sin \sigma, & c_1 &= 0 \\ a_2 &= \sin \sigma, & b_2 &= \cos \sigma, & c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Anche in questo caso si ha una notevole semplificazione delle espressioni (34) di s_1 e s_2 :

$$(43) \quad \begin{aligned} s_1 &= \frac{(d_1 - d_2)(r_x \cos \sigma - r_y \sin \sigma)}{r_z} \\ s_2 &= \frac{(d_2 - d_1)(r_x \sin \sigma + r_y \cos \sigma)}{r_z} \end{aligned}$$

Sostituendo ad esempio s_1 nelle x_1 e y_1 , oppure s_2 nelle x_2 e y_2 , si ottengono le coordinate del punto da tracciare sulla superficie dell'orologio:

$$x_s = -\frac{d_1 r_x}{r_z} + \frac{(d_1 - d_2) \cos \sigma (r_x \cos \sigma - r_y \sin \sigma)}{r_z}$$

oppure

$$x_s = -\frac{d_2 r_x}{r_z} + \frac{(d_2 - d_1) \sin \sigma (r_x \sin \sigma + r_y \cos \sigma)}{r_z}$$

(44)

$$y_s = -\frac{d_1 r_y}{r_z} - \frac{(d_1 - d_2) \sin \sigma (r_x \cos \sigma - r_y \sin \sigma)}{r_z}$$

oppure

$$y_s = -\frac{d_2 r_y}{r_z} + \frac{(d_2 - d_1) \cos \sigma (r_x \sin \sigma + r_y \cos \sigma)}{r_z}$$

OROLOGIO BIFILARE – ESEMPIO 4

Come ultimo esempio consideriamo un orologio bifilare il cui sistema gnomonico sia costituito da un filo verticale posto a distanza d_2 dal quadro e da una catenaria disposta su un piano verticale parallelo al quadro e distante d_1 da esso.

Fissiamo l'attenzione su una curva catenaria giacente su un piano. L'equazione nel caso più generale è data da:

$$(45) \quad y - y_v = f \cosh\left(\frac{x - x_v}{f}\right) - f$$

da cui

$$(46) \quad y = f \cosh\left(\frac{x - x_v}{f}\right) + y_v - f$$

ove x_v, y_v sono le coordinate del vertice (punto di minimo) e f è un fattore di scala. (In Appendice C viene esposto un metodo su come calcolare la lunghezza L del filo in modo che, fissate le coordinate dei vincoli di aggancio, il filo si disponga come desiderato).

Sul nostro sistema di riferimento XYZ, con il piano dell'orologio di equazione $z = 0$ le equazioni pa-

rametriche della catenaria (giacente sul piano $z = d_1$) nello spazio definito da XYZ saranno:

$$(47) \quad \begin{aligned} x &= s_1 \\ y &= f \cosh\left(\frac{s_1 - x_v}{f}\right) + y_v - f \\ z &= d_1 \end{aligned}$$

mentre il filo verticale continuerà ad essere definito con le equazioni parametriche (31) del caso illustrato sopra:

$$(48) \quad \begin{aligned} x &= a_2 s_2 & x &= 0 \\ y &= b_2 s_2 & \rightarrow & y = s_2 \\ z &= c_2 s_2 + d_2 & z &= d_2 \end{aligned}$$

Facendo sistema con l'equazione della superficie le equazioni delle ombre saranno date per il filo 1:

$$(49) \quad \begin{cases} x = r_x t + s_1 \\ y = r_y t + f \cosh\left(\frac{s_1 - x_v}{f}\right) + y_v - f \\ z = r_z t + d_1 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = r_x t + s_1 \\ y = r_y t + f \cosh\left(\frac{s_1 - x_v}{f}\right) + y_v - f \\ z = r_z t + d_1 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow (r_z t + d_1 = 0) \rightarrow t = -\frac{d_1}{r_z}$$

$$(49) \quad \begin{cases} x = -d_1 \frac{r_x}{r_z} + s_1 \\ y = -d_1 \frac{r_y}{r_z} + f \cosh\left(\frac{s_1 - x_v}{f}\right) + y_v - f \\ z = 0 \end{cases}$$

e per il filo 2:

$$(50) \quad \begin{cases} x = r_x t \\ y = r_y t + s_2 \\ z = r_z t + d_2 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow (r_z t + d_2 = 0) \rightarrow t = -\frac{d_2}{r_z}$$

$$(50) \quad \begin{cases} x = -d_2 \frac{r_x}{r_z} \\ y = -d_2 \frac{r_y}{r_z} + s_2 \\ z = 0 \end{cases}$$

A questo punto per trovare l'espressione delle coordinate dell'intersezione tra le due ombre dobbiamo trovare o il valore di s_1 o il valore di s_2 che rendono coincidenti i punti d'ombra. Appare subito chiaro che è molto più semplice trovare s_1 che non s_2 , infatti uguagliando le y si perviene ad una equazione ove l'incognita è una variabile di una funzione trascendente (\cosh) e pertanto la soluzione non può essere espressa algebricamente.

Quindi troviamo s_1 che soddisfa l'equazione che uguaglia la x delle due ombre:

$$(51) -d_1 \frac{r_x}{r_z} + s_1 = -d_2 \frac{r_x}{r_z} \rightarrow s_1 = \frac{(d_1 - d_2)r_x}{r_z}$$

e sostituendolo nelle equazioni parametriche dell'ombra del filo 1 avremo le coordinate del punto di incrocio delle due ombre:

(52)

$$x_s = \frac{-d_2 r_x}{r_z}$$

$$y_s = -d_1 \frac{r_y}{r_z} + f \cosh\left(\frac{1}{f} \left(\frac{(d_1 - d_2)r_x}{r_z} - xv\right)\right) + y_v - f$$

C'è da sottolineare che nel caso in cui, anziché da una curva algebrica (come la retta) e da una curva trascendente (come la catenaria), i due fili fossero stati espressi da due curve trascendenti (cioè non algebriche) il problema sarebbe risolvibile solo per via numerica e non analitica come fatto finora.

Si noti inoltre che le formule che si ottengono per le bifilari restano valide anche nel caso in cui i fili sono disposti (uno solo o entrambi) "oltre" la superficie (vedasi F. Savian [4]).

In questo caso i valori di d_1 e/o d_2 possono assumere valori negativi e la bifilare funziona poiché sia la rete di curve tracciate sulla superficie (trasparente) sia i fili vengono tutti proiettati su un'altra superficie ove si formano le ombre. Anche in questo tipo di orologi proiettivi il verso del raggio di proiezione è inessenziale contando solo la direzione.

CONCLUSIONI

E' stato qui illustrato, con numerosi esempi, un metodo analitico basato sul calcolo vettoriale come strumento per il calcolo degli orologi solari. A differenza di altri metodi analitici che sono in qualche modo legati alle costruzioni geometriche da cui derivano, il calcolo vettoriale ci permette di separare in modo netto l'aspetto proiettivo dell'orologio, dipendente solo dalla sua geometria, dall'aspetto puramente gnomonico-astronomico dipendente solo dal moto terrestre.

La progettazione si concentra tutta nel determinare una semplice espressione analitica del raggio proiettivo e nel calcolo dell'espressione assunta dal parametro t quando il raggio interseca la superficie dell'orologio.

I valori del parametro t e dei coseni direttori del raggio proiettivo che compaiono nelle formule sono calcolati a parte e sostituiti nell'espressione del raggio stesso permettendo un'ottimizzazione complessiva del lavoro computazionale.

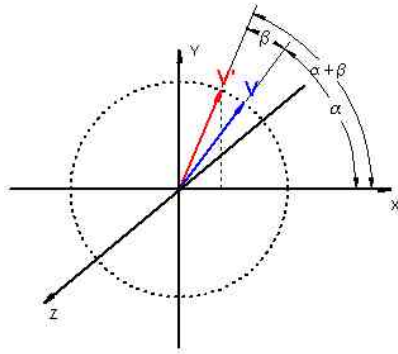
L'aver espresso il versore di proiezione in termini di coseni direttori legati al sistema di riferimento usato ci permette di controllare con facilità, durante il calcolo, che il raggio colpisca effettivamente la superficie gnomonica e ci evita quindi di generare curve "fantasma" come di solito succede quando si oltrepassa il limite di escursione di alcuni parametri

(tipicamente l'ora da cui si parte e l'ora su cui si vuol finire il calcolo in contrasto ad esempio con la declinazione del quadro). Infine, il metodo esteso agli orologi bifilari costituisce uno strumento molto versatile per esplorare facilmente nuove configurazioni e nuovi assetti di fili gnomonici.

RIFERIMENTI

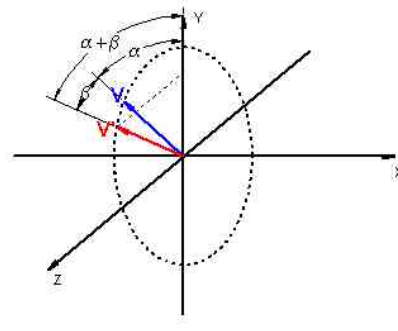
- [1] Denis Savoie, **La Gnomonique**. Ed. Les Belles Lettres, p. 377.
- [2] P. Giuseppe Lovotti, **L'orologio solare bifilare orizzontale: Applicazione di MathCAD**. Atti XII Seminario di Gnomonica, Rocca di Papa, Ottobre 2003.
- [3] Fabio Savian, **Bifilare, un nuovo approccio semplificato**. Gnomonica Italiana, n. 1.
- [4] Fabio Savian, **Orologi solari sulla cosustilare e con fili negativi**. Gnomonica Italiana, n. 5.
- [5] Dominique Collin, **Le système bifilaire généralisé**. http://membres.lycos.fr/gnomonic/articles/info_01.htm
- [6] Riccardo Anselmi, **L'orologio solare verticale**. Gnomonica Italiana, n. 5.
- [7] Gianni Ferrari, **Una curiosa proprietà delle meridiane bifilari**. Gnomonica, n.6, Maggio 2000.

Rotazione β attorno all'asse Z



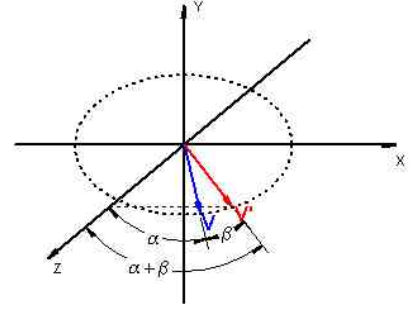
a)

Rotazione β attorno all'asse X



b)

Rotazione β attorno all'asse Y



c)

Fig. 6

APPENDICE A

Prodotto di una matrice per un vettore:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$u_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} v_k$$

Ad esempio, la componente u_2 è data da:

$$u_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3$$

Prodotto tra due matrici:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj}$$

Ad esempio, la componente c_{23} è data da:

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$$

Consideriamo ora un sistema destrorso XYZ ed un vettore di lunghezza V sul piano XY applicato all'origine e formante un angolo α con l'asse X (Fig 6a). Le componenti di questo vettore sono:

$$v_x = V \cos \alpha$$

$$v_y = V \sin \alpha$$

$$v_z = 0$$

Ruotiamo ora questo vettore di un angolo β attorno all'asse Z in senso positivo (antiorario). Le sue nuove componenti saranno:

$$\begin{aligned} v_x' &= V \cos(\alpha + \beta) = \\ &= V \cos \alpha \cos \beta - V \sin \alpha \sin \beta = \\ &= v_x \cos \beta - v_y \sin \beta \\ v_y' &= V \sin(\alpha + \beta) = \\ &= V \sin \alpha \cos \beta + V \sin \beta \cos \alpha = \\ &= v_y \cos \beta + v_x \sin \beta \\ v_z' &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x' &= v_x \cos \beta - v_y \sin \beta \\ v_y' &= v_x \sin \beta + v_y \cos \beta \\ v_z' &= 0 \end{aligned}$$

La matrice di rotazione sarà pertanto:

$$R_Z^\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente supponiamo di avere un vettore di lunghezza V sul piano YZ applicato all'origine e formante un angolo α con l'asse Y (Fig. 6b). Le componenti di questo vettore sono:

$$v_x = 0$$

$$v_y = V \cos \alpha$$

$$v_z = V \sin \alpha$$

Ruotiamo ora questo vettore in senso positivo (antiorario) attorno all'asse X di un angolo β :

$$\begin{aligned} v_x' &= 0 \\ v_y' &= V \cos(\alpha + \beta) = \\ &= V \cos \alpha \cos \beta - V \sin \alpha \sin \beta = \\ &= v_y \cos \beta - v_z \sin \beta \\ v_z' &= V \sin(\alpha + \beta) = \\ &= V \sin \alpha \cos \beta + V \sin \beta \cos \alpha = \\ &= v_z \cos \beta + v_y \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x' &= 0 \\ v_y' &= v_y \cos \beta - v_z \sin \beta \\ v_z' &= v_y \sin \beta + v_z \cos \beta \end{aligned}$$

La matrice di rotazione sarà pertanto:

$$R_x^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

Infine, attenzione, si consideri un vettore di lunghezza V sul piano XZ (ma forse è più indicativo dire ZX) applicato all'origine e formante un angolo α con l'asse Z (Fig 6c). Le componenti di questo vettore sono:

$$\begin{aligned} vx &= V \sin \alpha \\ vy &= 0 \\ vz &= V \cos \alpha \end{aligned}$$

Ruotiamo ora questo vettore attorno all'asse Y di un angolo β in senso positivo (antiorario):

$$\begin{aligned} vx' &= V \sin(\alpha + \beta) = \\ &= V \sin \alpha \cos \beta + V \sin \beta \cos \alpha = \\ &= vx \cos \beta + vz \sin \beta \\ vy' &= 0 \\ vz' &= V \cos(\alpha + \beta) = \\ &= V \cos \alpha \cos \beta - V \sin \alpha \sin \beta = \\ &= vz \cos \beta - vx \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} vx' &= vx \cos \beta + vz \sin \beta \\ vy' &= 0 \\ vz' &= -vx \sin \beta + vz \cos \beta \end{aligned}$$

La matrice di rotazione sarà pertanto:

$$R_Y^\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

Concludendo le matrici di rotazione di un vettore attorno agli assi principali sono quelle già usate in (15).

$$R_x^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$R_Y^\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$R_Z^\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

APPENDICE B

UN ALTRO MODO DI DESCRIVERE I COSENI DIRETTORI DEL RAGGIO PROIETTIVO

Risolto l'aspetto proiettivo del problema del tracciamento dell'orologio, dedichiamoci ora ad esprimere

in forma semplice i coseni direttori r_x, r_y, r_z del versore raggio, in funzione di H e di δ (angolo orario e declinazione del sole).

Per far questo è bene innanzi tutto fare una scelta oculata del sistema di riferimento X, Y, Z da usare; questo ci dovrà consentire di esprimere sia r_x, r_y, r_z sia l'equazione della superficie nel modo più semplice (semplificato) possibile ed occorrerà trovare un compromesso tra le due esigenze.

Solo allo scopo di illustrare il concetto, consideriamo il caso semplice di un orologio piano su una parete verticale rivolta esattamente a sud. Converterà scegliere un sistema di riferimento X, Y, Z con il piano XY coincidente col piano dell'orologio e con l'asse Z perpendicolare ad esso e tale da contenere il punto gnomonico.

L'asse Z punta verso sud e passa per il punto gnomonico, l'asse X sarà puntato verso est e l'asse Y verso l'alto. Noi osserveremo il sistema di riferimento con le spalle verso sud e guardando verso nord (Fig. 3).

Sul punto gnomonico sarà applicato il versore del raggio solare che, a seconda del valore di δ descriverà un cono con la concavità verso il polo nord o un circonferenza sul piano equatoriale o un cono con la concavità verso il polo sud. Si noti bene che quando il sole è sotto l'equatore il nostro versore descriverà la falda del cono verso il polo nord e viceversa, quando il sole è sopra l'equatore, il versore descriverà la falda di cono verso il polo nord (poiché questo versore indica il verso, opposto al sole, ove si proietta il punto gnomonico).

Nel sistema di riferimento così scelto la superficie gnomonica sarà definita dall'equazione $z = 0$ mentre per definire r_x, r_y, r_z in termini di declinazione del sole e di angolo orario, pensiamo il versore GC scomposto in tre vettori per i quali sia facile individuare le componenti in x, y e z (Fig 4).

Sia dunque \overline{GC} la generatrice di lunghezza 1 (versore) che descrive il cono della figura; possiamo pensare \overline{GC} composto dalla concatenazione dei vettori $\overline{GA}, \overline{AB}, \overline{BC}$ aventi modulo:

$$\begin{aligned} |GA| &= |GC| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = |GC| |\sin \delta| = \\ &= |\sin \delta| \\ (53) \quad |AB| &= |AC| \cos H = |GC| \cos \delta \cos H = \\ &= \cos \delta \cos H \\ |BC| &= |AC| \sin H = |GC| \cos \delta \sin H = \\ &= \cos \delta \sin H \end{aligned}$$

dove H è l'angolo orario e δ è la declinazione del sole.

Essendo $\overline{GC} = \overline{GA} + \overline{AB} + \overline{BC}$, ciascuno dei coseni direttori r_x, r_y, r_z di \overline{GC} sarà dato dalla somma delle rispettive componenti dei vettori della concatenazione:

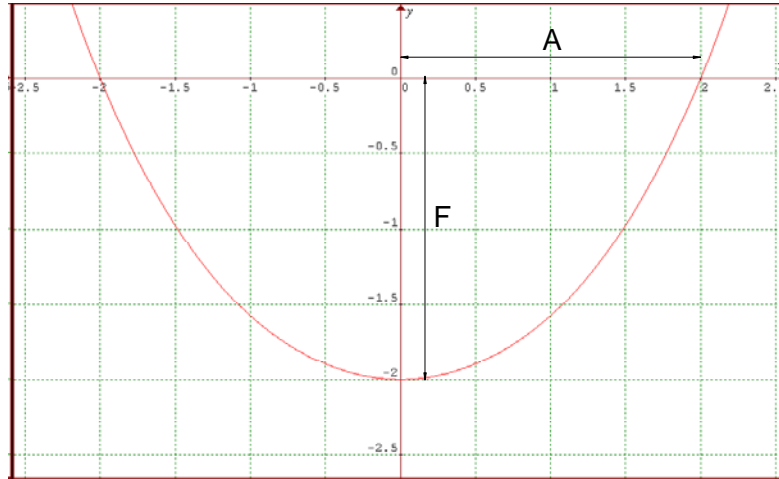


Fig. 7

$$(54) \quad \begin{aligned} r_x &= GC_x = GA_x + AB_x + BC_x \\ r_y &= GC_y = GA_y + AB_y + BC_y \\ r_z &= GC_z = GA_z + AB_z + BC_z \end{aligned}$$

Osservando la figura è facile esprimere r_x , r_y , e r_z come somme delle componenti di \overline{GA} , \overline{AB} , \overline{BC} :

$$(55) \quad \begin{aligned} GA_x &= 0 \\ GA_y &= \sin \delta \sin \varphi \\ GA_z &= -\sin \delta \cos \varphi \\ AB_x &= 0 \\ AB_y &= -\cos \delta \cos H \cos \varphi \\ AB_z &= -\cos \delta \cos H \sin \varphi \\ BC_x &= \cos \delta \sin H \\ BC_y &= 0 \\ BC_z &= 0 \end{aligned}$$

e quindi:

$$(56) \quad \begin{aligned} r_x &= \cos \delta \sin H \\ r_y &= \sin \delta \sin \varphi - \cos \delta \cos H \cos \varphi \\ r_z &= -\sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \cos H \sin \varphi \end{aligned}$$

come le (19).

APPENDICE C

Lo scopo di questa nota è quello di determinare quali sono i parametri costruttivi di uno gnomone a filo che si dispone naturalmente secondo la ben nota curva catenaria quando viene appeso tra due punti di coordinate x_a, y_a e x_b, y_b in un sistema di riferimento $X_c Y_c$.

Per risolvere questo problema, non proprio banale, partiamo dall'equazione base di una catenaria

$$(57) \quad y = \cosh x$$

Assumiamo ora che le coordinate siano entrambe divise per un fattore di scala. In tal modo pur aumentando le dimensioni della curva se ne conserva la forma:

$$(58) \quad \frac{y}{f} = \cosh \frac{x}{f} \quad \rightarrow \quad y = f \cosh \frac{x}{f}$$

Quando $x = 0$ l'ordinata della curva vale f ed è comodo eliminare questo offset in modo che le coordinate del vertice coincidano con l'origine del sistema di riferimento:

$$(59) \quad y = f \cosh \frac{x}{f} - f$$

Supponiamo poi di generalizzare questa equazione trasladola a piacere in modo che il vertice della catenaria assuma un valore voluto x_v, y_v .

Si avrà:

$$(60) \quad y - y_v = f \cosh \frac{x - x_v}{f} - f$$

e quindi l'equazione generalizzata della catenaria è:

$$(61) \quad y = f \cosh \frac{x - x_v}{f} + y_v - f$$

Si tratta ora di ricavare i vari parametri (x_v, y_v e f) dell'equazione in modo che soddisfi ai vincoli imposti (coordinate dei punti di aggancio e freccia).

Supponiamo, senza perdita di generalità, che la catenaria che vogliamo calcolare debba avere le coordinate di aggancio in $(x_a, y_a) = (-A, 0)$ e in $(x_b, y_b) = (A, 0)$ e supponiamo che vogliamo un fattore di forma tale che la freccia della catenaria e la semidistanza tra i punti di aggancio stiano in rapporto k (cioè $F = kA$).

Il vertice della catenaria avrà dunque coordinate $(0, -kA)$, come illustrato in Fig. 7.

Per trovare il fattore di scala f intersechiamo la catenaria base con la retta $y = kx + 1$ (nell'esempio di Fig. 8 è $k = 1$) e troviamo il valore di a cioè l'ascissa

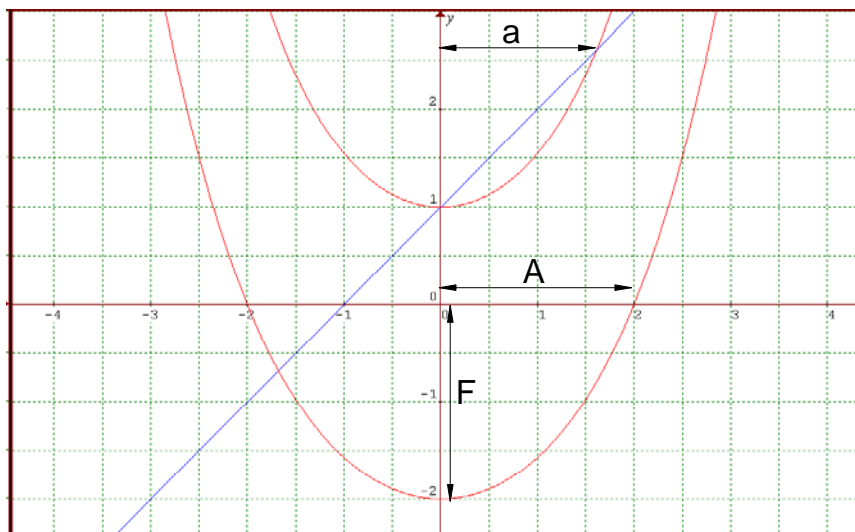


Fig. 8

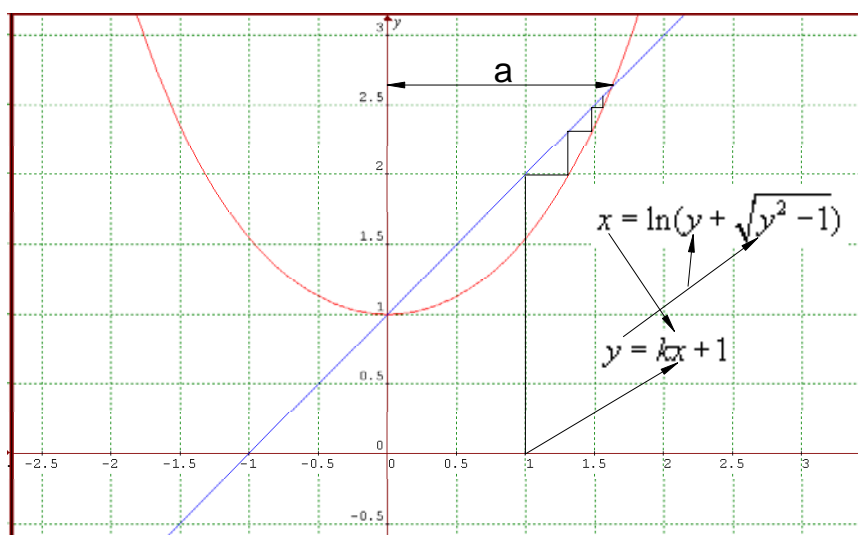


Fig. 9

del punto di intersezione tra la retta con pendenza k e la catenaria base. Ovviamente trovato a avremo che il fattore di scala sarà $f = A/a$ che sostituito nella (61) ci darà l'equazione della catenaria cercata. Nella figura di esempio si è scelto $A = 2$ e $k = 1$ e quindi $F = kA = 2$.

Per trovare il valore di a occorre risolvere un'equazione trascendente. La soluzione può essere trovata solo per via numerica iterando tra la retta e la funzione inversa di \cosh . L'espressione della funzione inversa di \cosh si ricava come qui di seguito indicato:

$$y = \cosh(x) \quad \rightarrow \quad (62) \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$$

da cui

$$(63) \quad e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

e ponendo $t = e^x$ si ha

$$(64) \quad t^2 - 2yt + 1 = 0$$

che ha per soluzioni

$$(65) \quad t = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

ma essendo $t = e^x$ si ha

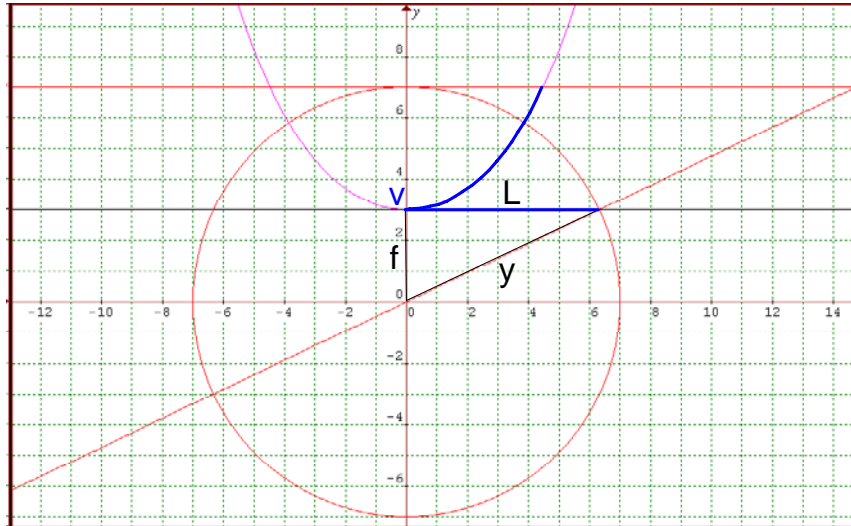


Fig. 10

$$(66) \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

e passando al logaritmo per entrambi i membri

$$(67) \quad \ln(e^x) = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

e infine

$$(68) \quad x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

Delle due soluzioni prendiamo quella sicuramente definita per $y \geq 1$ e otteniamo che la funzione inversa di $y = \cosh x$ è:

$$(69) \quad x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

Ora iterando come indicato in Fig. 9 tra $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ e $y = kx + 1$ si trova il valore di a e quindi di f .

È anche molto utile, dal punto di vista costruttivo, calcolare la lunghezza della catena in modo che posta sugli agganci prestabiliti essa si disponga in modo da formare la freccia richiesta.

Per calcolare L possiamo partire dalla equazione base della catenaria e poi moltiplicare per il fattore di scala f il valore trovato.

Si ha:

$$(70) \quad \begin{aligned} l &= \int_0^a ds = \\ &= \int_0^a \sqrt{dy^2 + dx^2} = \int_0^a \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2 + dx^2} = \\ &= \int_0^a \left(\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} \right) dx = \int_0^a \left(\sqrt{\sinh^2(x) + 1} \right) dx = \\ &= \int_0^a \cosh(x) dx = [\sinh(x)]_0^a = \sinh(a) \end{aligned}$$

e dunque:

$$(71) \quad L = f l = f \sinh(a)$$

ma, essendo

$$(72) \quad f = \frac{A}{a} \rightarrow a = \frac{A}{f}$$

si ha in definitiva

$$(73) \quad L = f \sinh \frac{A}{f}$$

Considerando che nella trigonometria iperbolica vale la relazione

$$(74) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

possiamo trovare la lunghezza di una catenaria anche con una costruzione geometrica con riga e compasso.

Infatti:

$$(75) \quad \begin{aligned} L &= f \sinh \frac{A}{f} = f \sqrt{\cosh^2 \frac{A}{f} - 1} = \\ &= \sqrt{f^2 \cosh^2 \frac{A}{f} - f^2} \end{aligned}$$

ma ricordando che $y = f \cosh \frac{A}{f}$ si ha:

$$(76) \quad L = \sqrt{y^2 - f^2}$$

Questa relazione ci permette, o mediante il teorema di Pitagora o geometricamente come indicato in Fig. 10, di ricavare la lunghezza di un segmento di catenaria partendo solo dall'ordinata y dell'estremo del segmento (Fig. 10).